

# Die Fourier-Transformation und ihre Anwendungen – Teil 2



Der Autor Prof. Dr.-Ing. Dietmar Rudolph (61) kam 1972 zur damaligen Ingenieurakademie und späteren Fachhochschule der Deutschen Bundespost Berlin. Er lehrte dort analoge und digitale Übertragungstechnik, Digitale Signalverarbeitung, Regelungstechnik und Mobilfunktechnik. Seit 1983 beschäftigt er sich mit der digitalen Übertragung im Rundfunk. Derzeit ist er beim TTC IBH (Institut für Bildung und Hochschulkooperation des Telekom Training Center) beschäftigt.

Im ersten Teil des Beitrages über die Fourier-Transformation und ihre Anwendungen in Heft 4/2002 wurde der Zusammenhang zwischen den Formeln und der Messung der Spektraldichte aufgezeigt. Weiterhin wurde mit der grafischen Interpretation der Fourier-Transformation begonnen. Diese „Grafische Methode“ ist dazu geeignet, auf einfache Weise zu Näherungs-Lösungen zu kommen, die für viele Aufgabstellungen in der Nachrichtentechnik eine ausreichende Genauigkeit besitzen. Im vorliegenden zweiten Teil wird dieses grafisch orientierte Verfahren weiter entwickelt und auf die Gesetzmäßigkeiten zwischen Zeitfunk-

tionen und Spektraldichten ausgedehnt. Die Gesetze oder Sätze der Fourier-Transformation werden meist als „trocken“ empfunden. Dies hat die Ursache, dass oft nicht ersichtlich ist, wozu diese in der Praxis gebraucht werden können. Daher werden hier zu allen angegebenen Sätzen Beispiele für die entsprechenden Anwendungen gegeben. Einige Beispiele sind sehr knapp gehalten, um den Gedankengang des Abschnitts nicht zu unterbrechen. Andere Beispiele, die entweder zum Einüben der „Grafischen Methode“ dienen oder deren technische Bedeutung besonders groß ist, werden etwas ausführlicher behandelt.

## 15 Sätze der Fourier-Transformation

Für den Zusammenhang zwischen Zeitfunktionen und Spektraldichten oder Frequenzfunktionen gelten die folgenden Gesetzmäßigkeiten, welche zunächst als Übersicht aufgelistet werden. In den weiteren Abschnitten werden diese Beziehungen genauer dargestellt und jeweils typische und wichtige Anwendungen gezeigt.

Diese Gesetzmäßigkeiten zeigen Wege, wie man ausgehend von bekannten Korrespondenzen der Fourier-Transformation zu neuen Zusammenhängen kommt, oder umgekehrt, wie man gesuchte Korrespondenzen aus bekannten Korrespondenzen entwickeln kann. Diese Vorgehensweise ist von besonderem Interesse, weil hiermit erkennbar wird, wie z. B. eine Veränderung im Zeitbereich sich auf die Eigenschaften in der Spektraldichte abbildet (Tabelle).

Es folgen die Sätze im Einzelnen mit kurzem Beweis und die Anwendungen dieser Sätze in der Übertragungstechnik. Hierbei ist jeweils vorausgesetzt, dass eine oder mehrere folgender Korrespondenzen bekannt sind:

$$\begin{aligned} f(t) &\leftrightarrow F(\omega), & g(t) &\leftrightarrow G(\omega), \\ h(t) &\leftrightarrow H(\omega) \end{aligned} \quad (2.1)$$

### 15.1 Linearitätssatz

Der Linearitätssatz oder Überlagerungssatz hat bei der Beschreibung von Systemen eine große Bedeutung, denn er gestattet es, größere Problemstellungen in kleinere überschaubare Teile zu zerlegen. Es sind  $a$  und  $b$  Konstanten und  $f(t)$ ,  $g(t)$  sind Zeitfunktionen, deren Spektralverteilungen  $F(\omega)$ ,  $G(\omega)$  bekannt sein sollen. Dann gilt:

$$a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \leftrightarrow a \cdot F(\omega) + b \cdot G(\omega) \quad (2.2)$$

Satz	Zeitbereich $f(t)$	Frequenzbereich $F(\omega)$
Zentralordinate	$f(0)$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$	$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega$ $= F(0)$
Linearität	$a \cdot f(t) + b \cdot g(t)$	$\leftrightarrow a \cdot F(\omega) + b \cdot G(\omega)$
Symmetrie	$f_e(t)$ $f_o(t)$	$\leftrightarrow F_e(\omega)$ $\leftrightarrow j \cdot F_o(\omega)$
Vertauschung	$F(t)$	$\leftrightarrow 2\pi \cdot f(-\omega)$
Ähnlichkeit	$f(at)$	$\leftrightarrow \frac{1}{ a } \cdot F(\omega/a)$
Zeitverschiebung	$f(t-t_0)$	$\leftrightarrow e^{-j\omega t_0} \cdot F(\omega)$
Frequenzverschiebung	$e^{+j\Omega_0 t} \cdot f(t)$	$\leftrightarrow F(\omega - \Omega_0)$
Differenziation	$d/dt f(t)$ $t \cdot f(t)$	$\leftrightarrow j\omega \cdot F(\omega)$ $\leftrightarrow j d/d\omega F(\omega)$
Integration	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \cdot F(\omega) + \pi \cdot F(0) \delta(\omega)$
Faltung	$f(t) * g(t)$	$\leftrightarrow F(\omega) \cdot G(\omega)$
Multiplikation	$f(t) \cdot g(t)$	$\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \cdot F(\omega) * G(\omega)$
Energiesatz	$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$	$\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty}  F(\omega) ^2 d\omega$
Korrelation	$f(t) * f(t)$	$\leftrightarrow  F(\omega) ^2$

Tabelle: Übersicht der Korrespondenzen

Die einzelnen Teile dürfen also getrennt transformiert werden.

**Beweis**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{a \cdot f(t) + b \cdot g(t)\} e^{-j\omega t} dt$$

$$= a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt + b \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= a \cdot F(\omega) + b \cdot G(\omega)$$

Wie unmittelbar zu erkennen ist, gilt die Formel Gleichung (2.2) in entsprechender Weise auch für eine Zerlegung in mehr als zwei Teile.

Zwei Beispiele erläutern die Vorgehensweise. Die Bilder 14 und 15 zeigen zwei Rechteck-Impulse  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$  mit der jeweiligen Höhe  $A$  und den Breiten  $2T$  bzw.  $T$ . Diese Flächen  $2AT$  bzw.  $AT$  finden sich in den Spektren als Zentralordinaten wieder. Addiert man die beiden Rechteckfunktionen, ergibt sich eine Art Treppenkurve  $f_{\Sigma}(t)$ . Deren Spektralverteilung  $F_{\Sigma}(\omega)$  ist die Summe der Spektralverteilungen  $F_1(\omega)$  und  $F_2(\omega)$ .

Die (ersten) Nullstellen  $\omega_N$  im Spektrum eines  $\sin(x)/x$  liegen im Abstand  $2\pi/\text{Pulsbreite}$  des Rechteckimpulses. Damit folgt für die beiden Spektren:

$$\omega_{N1} = 2\pi/2T = \pi/T \text{ für Spektraldichte } F_1(\omega) \tag{2.3}$$

$$\omega_{N2} = 2\pi/T \text{ für Spektraldichte } F_2(\omega) \tag{2.4}$$

Die Addition der beiden Spektraldichten wurde mithilfe des Rech-

nerprogramms MATLAB<sup>18</sup> durchgeführt, weil Freihandskizzen hier zu ungenau werden, was insbesondere die genaue Lage der Nullstellen in der Spektraldichte der Summenkurve betrifft.

Wird nun die Zeitfunktion  $f_2(t)$  von  $f_1(t)$  subtrahiert, bleiben in diesem Beispiel zwei zeitverschobene Rechtecke übrig, die  $f_{\Delta}(t)$  bilden. Die entsprechenden Spektren sind in der gleichen Art zu subtrahieren. Damit wird:

$$F_{\Delta}(\omega) = F_1(\omega) - F_2(\omega) \tag{2.5}$$

Die grafische Vorgehensweise zeigen die Bilder 16 und 17. Auch hier wird die Spektralverteilung der Differenzkurve mit MATLAB errechnet und gezeichnet<sup>19</sup>.

**15.1.1 Linearität bei Übertragungssystemen**

Durch die Fourier-Zerlegung der Eingangsgröße eines linearen Systems erhält man Cosinus- und Sinus-förmige (bzw. in komplexer Darstellung  $e^{j\omega t}$ -förmige) Komponenten. Für jede dieser Komponenten kann mithilfe der komplexen Rechnung die zugehörige Ausgangsgröße bestimmt werden. Die gesamte Ausgangsfunktion ist dann die Summe oder Überlagerung sämtlicher einzelner Ausgangsgrößen. Dies ist die Aussage des Linearitäts- oder Überlagerungssatzes.

Auf diese Art und Weise wird mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung die Ausgangsgröße von elektrischen Netzwerken berechnet. Bei diesem analytischen Ansatz muss das Netzwerk im Einzelnen bekannt sein, das heißt seine Elemente und seine Struktur.

Im Unterschied dazu wird im Zusammenhang mit der Fourier-Transformation ein **systemtheoretischer Ansatz** gewählt. Ein Übertragungssystem wird dabei definiert als „Black Box“, die für eine vorgegebene Eingangsgröße eine gewünschte Ausgangsgröße liefert. Hierbei wird zunächst keine Rücksicht auf eine etwaige Realisier-

<sup>18</sup> Siehe hierzu den Beitrag „Das Programm MATLAB – eine Starthilfe für Einsteiger“, Unterrichtsblätter Nr. 10/1999, S. 566–577.

<sup>19</sup> Mithilfe des Zeitverschiebungssatzes und des Faltungssatzes ergeben sich alternative Berechnungsmöglichkeiten für die Spektraldichte in diesem Beispiel, die bequem auch freihändig ausführbar sind.

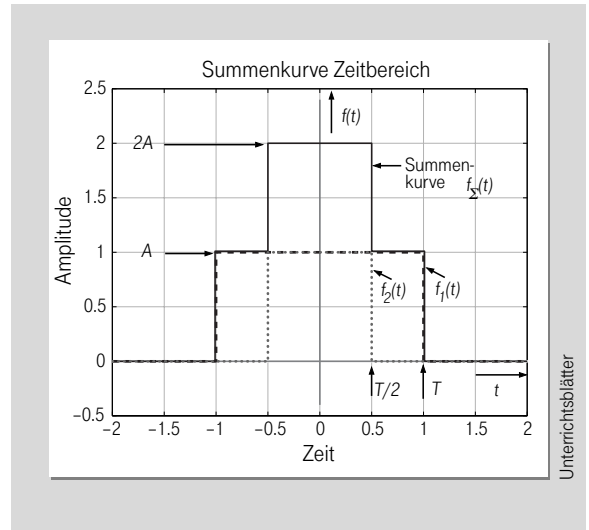


Bild 14: Addition der Zeitfunktionen

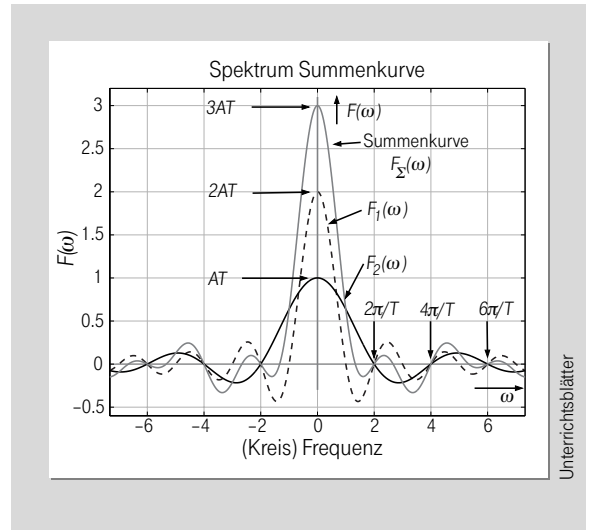


Bild 15: Spektren der Addition der Zeitfunktionen

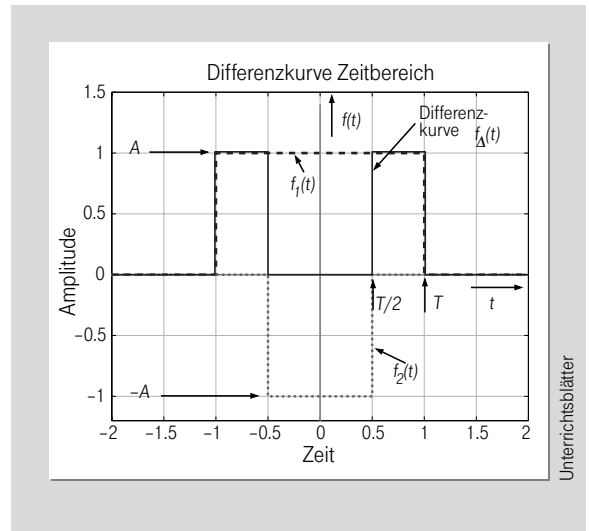


Bild 16: Subtraktion der Zeitfunktionen

**Das Thema im Überblick**

Im vorliegenden zweiten Teil über die Fourier-Transformation und ihre Anwendungen werden zunächst deren Sätze vorgestellt. Es werden die Sätze zu Linearität, Symmetrie, Vertauschung, Ähnlichkeit mit Zeit-Bandbreiten-Gesetz und Zeitverschiebung ausführlich behandelt und es wird gezeigt, wo diese Gesetzmäßigkeiten in der Technik Anwendung finden, beispielsweise in der Digitalen Übertragung und der Digitalen Filterung. Sehr wichtig in diesem Zusammenhang ist die kartesische und polare Darstellung von Signalen. Daneben wird wiederholt mithilfe der „Grafischen Methode“ erklärt, wie es ohne großen Rechenaufwand möglich ist, zu Resultaten zu kommen.

$$f(t) = \Re\{f_e(t)\} + j\Im\{f_e(t)\} + \Re\{f_o(t)\} + j\Im\{f_o(t)\} \quad (2.6)$$

$$F(\omega) = \Re\{F_e(\omega)\} + j\Im\{F_e(\omega)\} + \Re\{F_o(\omega)\} + j\Im\{F_o(\omega)\}$$

Kasten: Symmetrien von Zeitfunktion und Spektraldichte

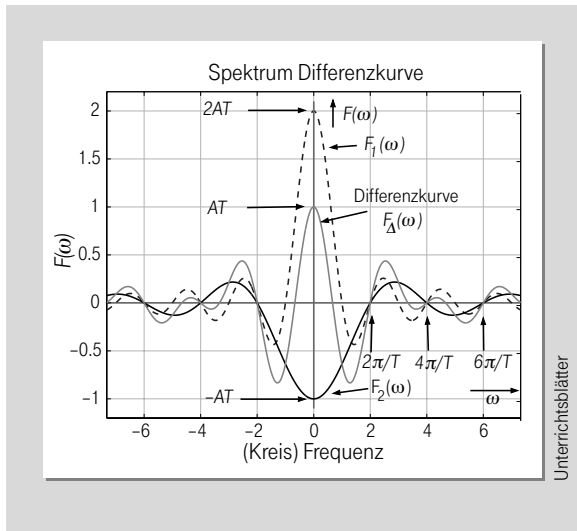


Bild 17: Spektren der Subtraktion der Zeitfunktionen

barkeit dieser Black Box genommen. Die Ergebnisse lassen sich dadurch einfacher bestimmen, stellen praktisch gesehen aber nur Näherungslösungen dar. Viele „Daumenregeln“ in der Praxis werden auf diese Weise gewonnen.

### 15.1.2 Näherungsweise Linearität in der Praxis

Praktische Systeme verhalten sich meist nur näherungsweise (und nur innerhalb eines gewissen Arbeitsbereiches) linear. Die Abweichungen von der Linearität werden dann mithilfe von Klirrfaktoren oder Verzerrungsfaktoren ausgedrückt. Wird der Aussteuerungsbereich überschritten, treten im Allgemeinen Sättigungs-Verzerrungen auf.

### 15.2 Symmetrien von Zeitfunktion und Spektraldichte

Zeitfunktionen und Spektraldichten lassen sich nach dem Linearitätssatz zerlegen in:

- gerade und ungerade Anteile
- reelle und imaginäre Anteile

Im allgemeinen Fall der komplexen Zeitfunktion ergeben sich dadurch folgende Teile, wobei hier interessiert, welcher Teil der Zeitfunktion in welchen Teil des Spektrums transformiert wird. ( $\Re$  steht für „Realanteil von“ und  $\Im$  steht für „Imaginäranteil von“.) Siehe Kasten.

#### Beweis

$$F_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t) \cdot \cos(\omega t) dt$$

gerade, even

$$-j \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t) \cdot \sin(\omega t) dt$$

ungerade, odd

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t) \cdot \cos(\omega t) dt$$

$$F_o(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_o(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$= \dots$$

$$= -j \int_{-\infty}^{\infty} f_o(t) \cdot \sin(\omega t) dt$$

Das Integral über einen ungeraden (odd) Integranden ist jeweils Null, weil wegen der Symmetrie die positiven und negativen Anteile gleich groß sind. Für die Aufspaltung in  $\Re\{\}$  und  $\Im\{\}$  gilt der Linearitätssatz.

Die Symmetriebezeichnungen nach Gleichung (2.6) werden in Bild 18 veranschaulicht. Vereinfachend gegenüber Gleichung (2.6) gilt für reelle Zeitfunktionen:

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t) \quad (2.7)$$

$$F(\omega) = F_e(\omega) + jF_o(\omega)$$

#### 15.2.1 Symmetrien zur Kontrolle von Ergebnissen

Die Symmetrien von Zeitfunktionen und deren Spektralverteilungen dienen der Kontrolle bei der grafischen Methode. Ein Ergebnis, das beispielsweise über verschiedene Zwischenschritte hergeleitet wurde, kann mit einer Symmetrieüberlegung auf Fehler überprüft werden.

„Imaginär“ bedeutet 90 Phasendrehung bei der Spektralverteilung

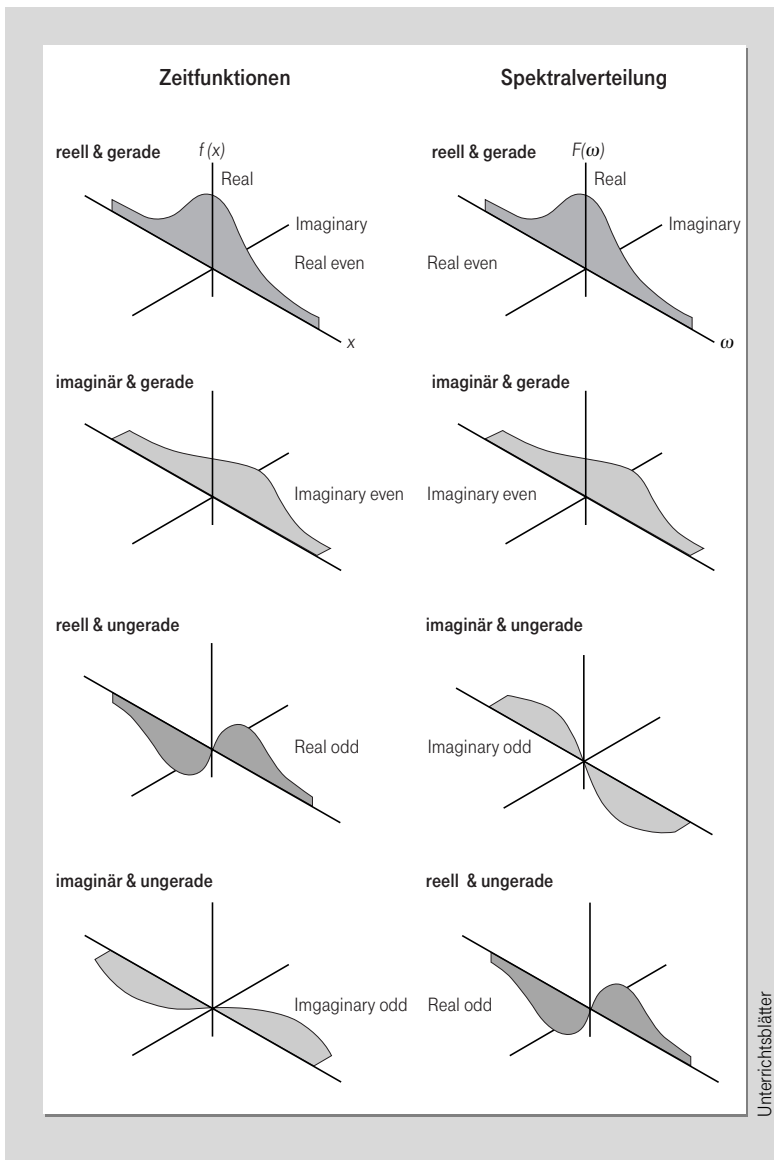


Bild 18:

Ist eine Spektralverteilung imaginär, heißt dies, dass sie sich aus Sinus-Komponenten zusammensetzt. Damit bedeutet imaginär 90° Phasendrehung im Spektrum.

### 15.2.2 Komplexe Zeitfunktionen bei Basisband-Signalen

In der Regel hat man es nur mit reellen Zeitfunktionen zu tun. Die Gleichungen (2.6) vereinfachen sich dann entsprechend, wie in Gleichung (2.7) gezeigt. Komplexe Zeitfunktionen treten in einer speziellen – jedoch sehr wichtigen – Anwendung auf, und zwar beim Ersatz eines Bandpass-Systems durch ein äquivalentes Tiefpass-System. Dies ist speziell für die digitale Signalverarbeitung von Interesse, weil dort wegen der erreichbaren Takteschwindigkeit nicht im Bandpass-Bereich, sondern nur im Tiefpass-Bereich (Basisband) gearbeitet werden kann. Auch die Modulationen werden dabei komplex im Basisband berechnet.

### 15.2.3 Spektraldichte in polarer Darstellung

Ganz allgemein kann eine komplexe Größe in kartesischer Darstellung als  $z = x + jy$  oder in polarer Darstellung als  $z = r \cdot e^{j\varphi}$  angegeben werden<sup>20</sup>. Hierbei gilt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \text{ Betrag} \quad (2.8)$$

$$\varphi = \arctan(y/x) = \angle z \text{ Phasenwinkel} \quad (2.9)$$

Diese Koordinatentransformation wird auf die Spektraldichte  $F(\omega)$  angewendet:

$$F(\omega) = \Re\{F(\omega)\} + j\Im\{F(\omega)\} \quad (2.10)$$

kartesische Darstellung

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.11)$$

polare Darstellung

$$F(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.12)$$

Betrag und Phase

In der Gleichung (2.12) wird somit die Spektraldichte  $F(\omega)$  nach Betrag  $A(\omega) = |F(\omega)|$  und Phase  $\varphi(\omega)$ , das heißt in polarer Darstellung, angegeben<sup>21</sup>.

### 15.2.4 Symmetrien von Betrag und Phase der Spektraldichten reeller Zeitfunktionen

Mit Gleichung (2.7) gilt für reelle Zeitfunktionen:

$$f(t) \circ \bullet F(\omega) = F_e(\omega) + jF_o(\omega) \quad (2.13)$$

Für den Betrag  $A(\omega)$  folgt daraus:

$$A(\omega) = \sqrt{F_e^2(\omega) + F_o^2(\omega)} \quad (2.14)$$

gerade in  $\omega$

Der Betrag  $A(\omega)$  ist also gerade in  $\omega$ . Für die Phase  $\varphi(\omega)$  folgt entsprechend:

$$\varphi(\omega) = \arctan [F_o(\omega)/F_e(\omega)] \quad (2.15)$$

ungerade in  $\omega$

Die Phase  $\varphi(\omega)$  in der Spektraldichte einer reellen Zeitfunktion ist damit ungerade in  $\omega$ . Sie ist nicht unbedingt linear<sup>22</sup>, sondern nur punktsymmetrisch im Punkt 0/0. Bei der grafischen Methode können diese Symmetrien zur Kontrolle für das Endergebnis dienen.

Das Bild 19 zeigt einen typischen Verlauf von Betrags- und Phasenkurven, wenn diese zu reellen Zeitfunktionen gehören. Das Beispiel zeigt den Amplituden- und Phasengang  $A(\omega)$ ,  $\theta(\omega)$  eines Tiefpass-Systems (mit reeller Impulsantwort).

### 15.3 Vertauschung von Zeitfunktion und Spektraldichte

Durch die Ähnlichkeit (bis auf ein Vorzeichen und den Faktor  $2\pi$ ), welche das Fourier-Integral Gleichung (1.4)<sup>23</sup> und die Fourier-Transformation Gleichung (1.3) besitzen, wird es möglich, bei allen Korrespondenzen den Zeit- mit dem Frequenz-Bereich zu tauschen. Dadurch benötigt man nur die halbe Anzahl von Korrespondenzen, weil diese sofort invers zu interpretieren (spiegeln) sind. Dies geschieht in der folgenden Weise: Kennt man die Korrespondenz

Zeitfunktion  $f(t) \circ \bullet$  Spektraldichte:  $F(\omega)$ , so gilt für die Spiegel-Korrespondenz  $g(t) \circ \bullet G(\omega)$ :

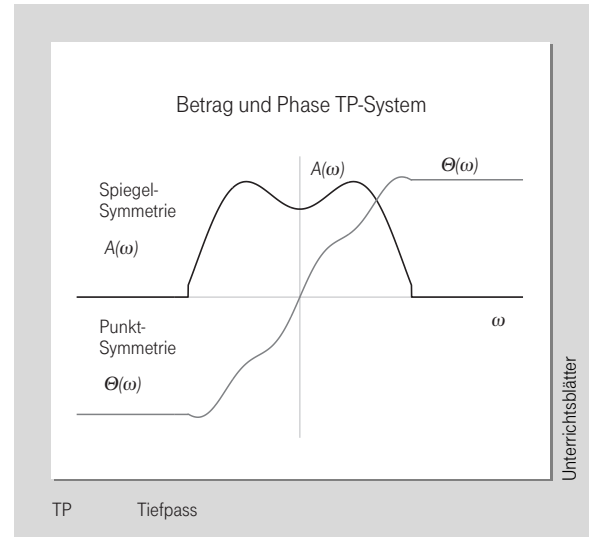
$$\begin{aligned} \text{Zeitfunktion: } g(t) &= F(t) \\ \text{Spektraldichte: } G(\omega) &= 2\pi f(-\omega) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die neue Zeitfunktion sieht wie die alte Spektraldichte aus, und die neue Spektraldichte sieht dann wie die alte Zeitfunktion aus. Dieser Zusammenhang kann auch als gespiegelte Korrespondenz bezeichnet werden.

#### Beweis

Aus dem Fourier-Integral Gleichung (1.4) folgt mit der Umbenennung  $t \rightarrow \omega$  bzw.  $\omega \rightarrow t$ :

$$\begin{aligned} 2\pi f(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{-j\omega t} d\omega \\ \Rightarrow 2\pi f(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$



### 15.3.1 Vertauschungssatz für gerade Funktionen

Das Bild 20 zeigt ein Beispiel für den Vertauschungssatz bei geraden oder spiegelsymmetrischen Funktionen<sup>24</sup>.

$$\Pi_T(t) \circ \bullet 2T \cdot \sin(\omega T) / (\omega T) \quad (2.17)$$

$$\omega_c / \pi \cdot \sin(\omega_c t) / \omega_c t \circ \bullet \Pi_{\omega_c}(\omega) \quad (2.18)$$

Bei geraden Funktionen wirkt sich das Minuszeichen des Vertauschungssatzes, Gleichung (2.16) nicht aus, denn es gilt  $f_e(-t) = f_e(t)$ . Aus den Gleichungen (2.17) und der grafischen Darstellung hierzu (s. Bild 20) folgt die einfache, aber wichtige Beziehung über den Zusammenhang zwischen der **Breite des Rechteckimpulses** und der **Entfernung der beiden ersten Nullstellen des  $\sin(x)/x$** .

Bild 19: Symmetrien von Betrag und Phase der Übertragungsfunktion eines Tiefpass-Systems

<sup>20</sup> Siehe hierzu den Beitrag „Zeitfunktionen und Spektren oder: Was ist Frequenz?“, Unterrichtsblätter Nr. 9/2001, S. 522–529.

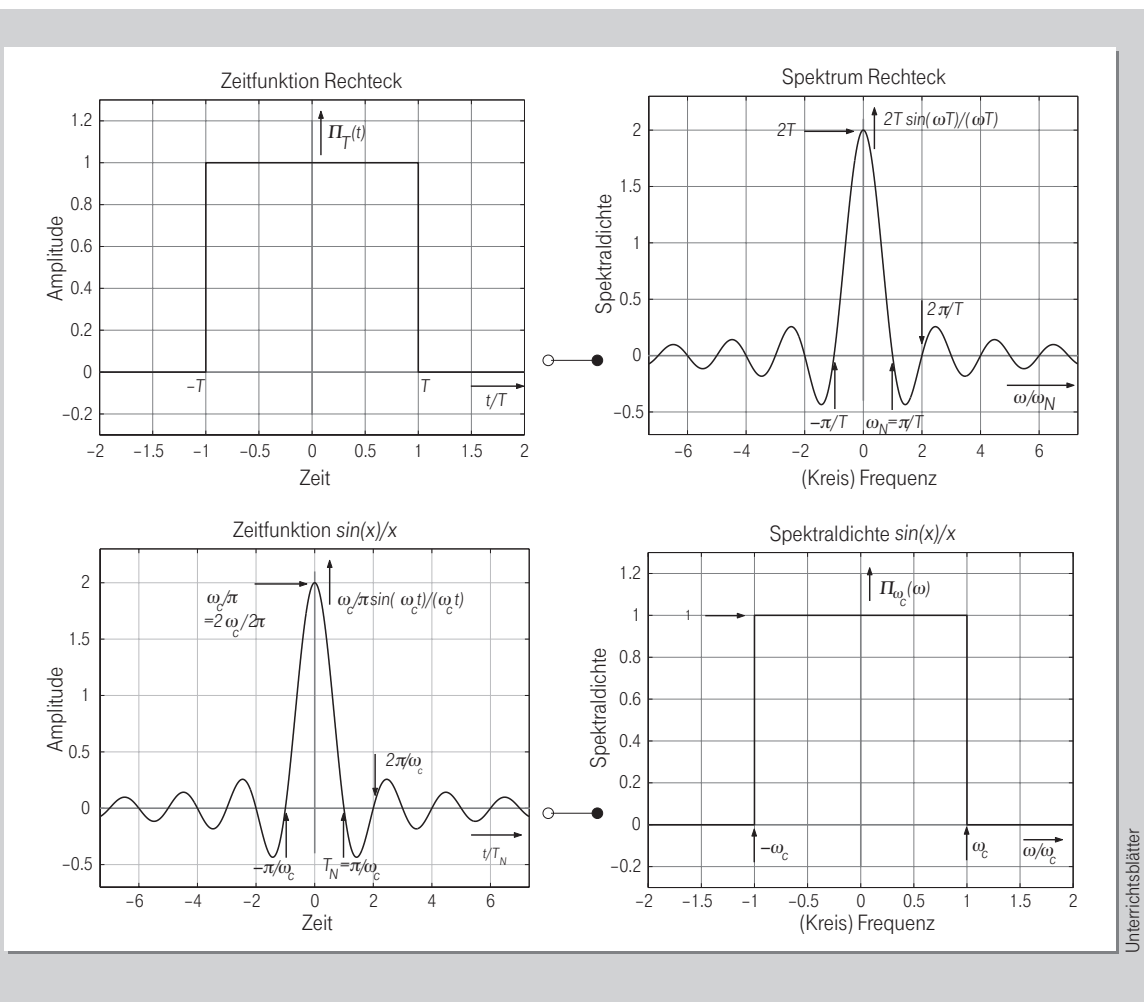
<sup>21</sup> Messtechnisch lassen sich Betrag und Phase einer Spektralfunktion einfacher ermitteln als Real- und Imaginärteil. In der Praxis wird daher die polare Darstellung bevorzugt, weil eine Messung von Real- und Imaginärteil eine phasenstarre Kopplung zwischen Messobjekt und Messgerät erfordern würde, was häufig nicht möglich ist, wie z. B. beim Spektrumanalysator.

<sup>22</sup> Hingegen ist die Phasendrehung infolge der Zeitverschiebung linear, siehe Gleichung (2.32). Ein Übertragungssystem wie z. B. eine zeitverzögernde Leitung, die nur eine Zeitverzögerung (Laufzeit) bewirkt, hat demzufolge auch eine lineare Phase.

<sup>23</sup> Siehe hierzu den ersten Teil dieses Beitrags.

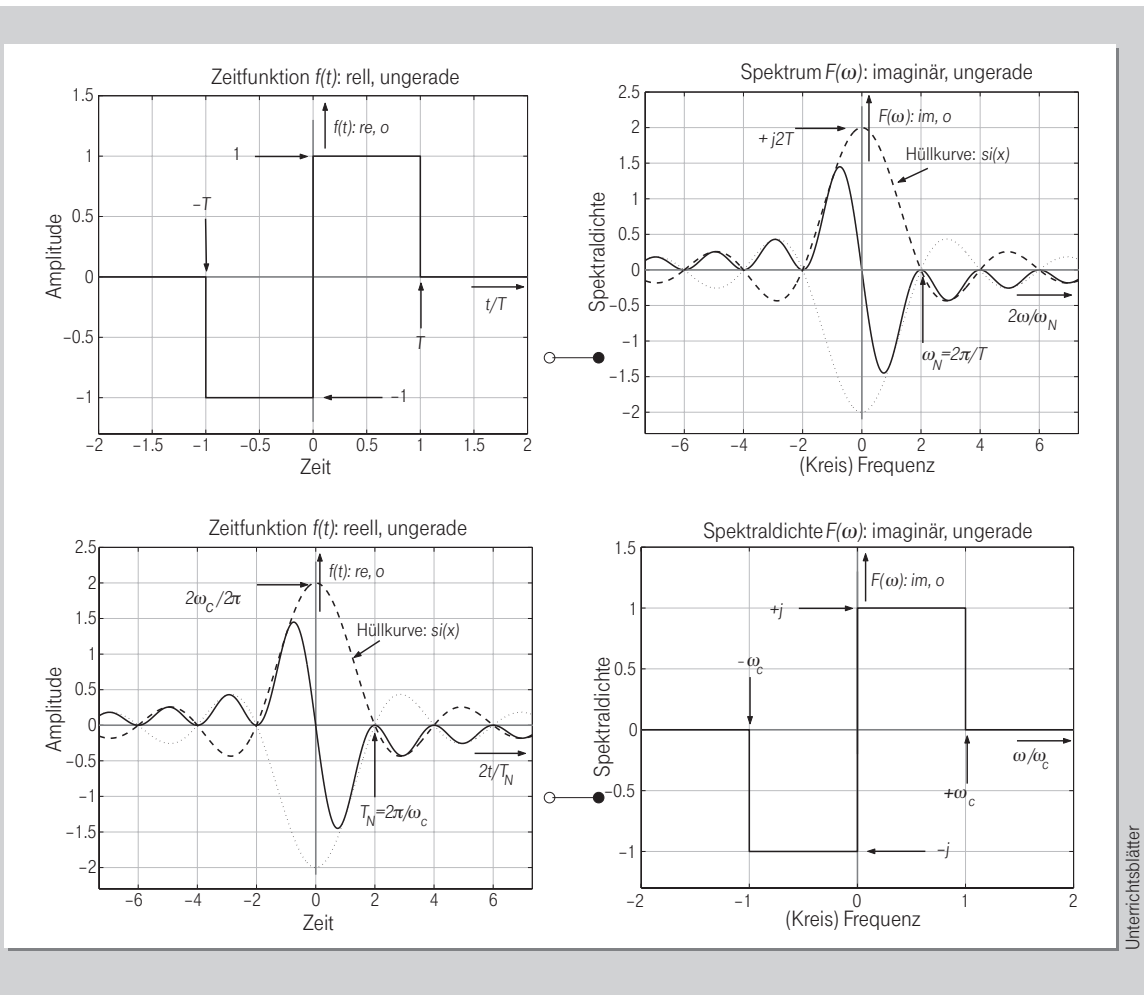
<sup>24</sup> Die hier gezeigten Korrespondenzen werden für die grafische Methode zur Bestimmung der Fourier-Transformierten als Basis verwendet.

Bild 20:  
Vertauschung  
bei geraden  
Funktionen am  
Beispiel des  
Rechteckimpulses



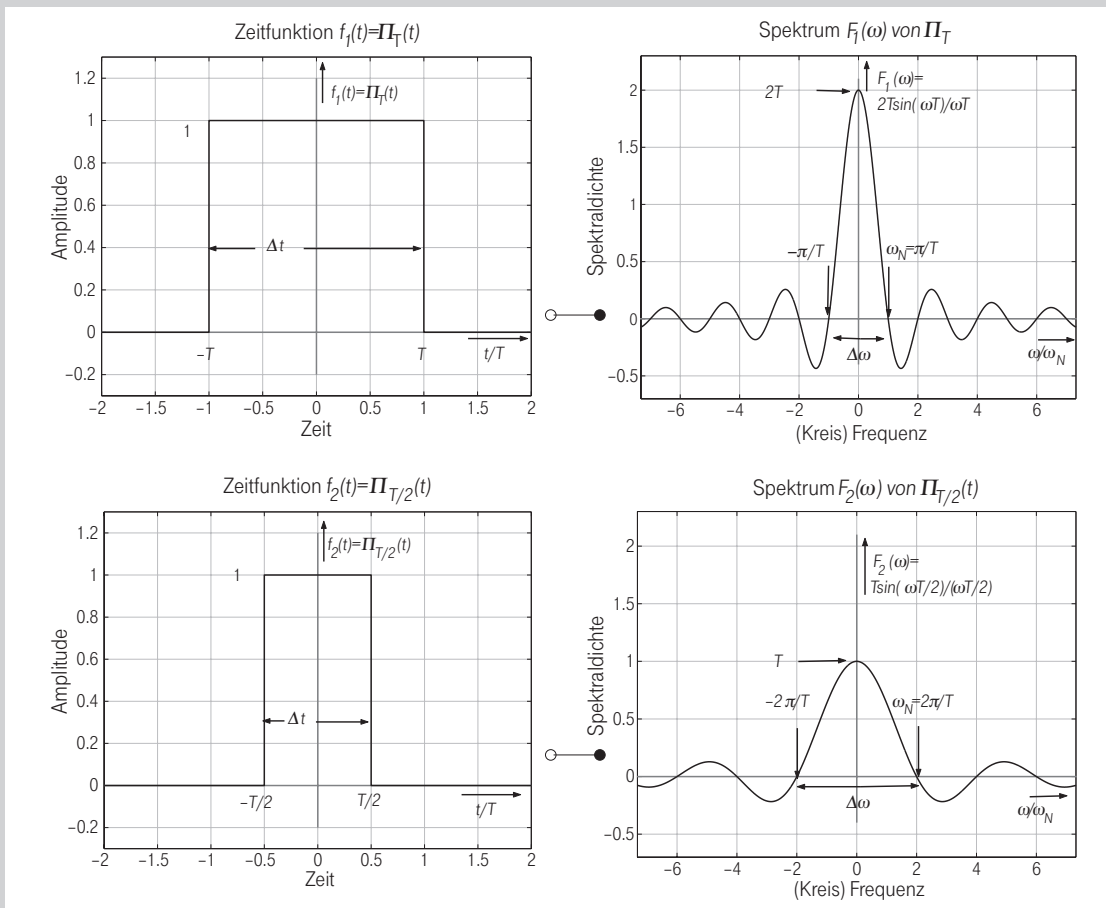
Unterrichtsblätter

Bild 21:  
Vertauschung  
bei ungeraden  
Funktionen  
(Zeitfunktion  
jeweils reell)



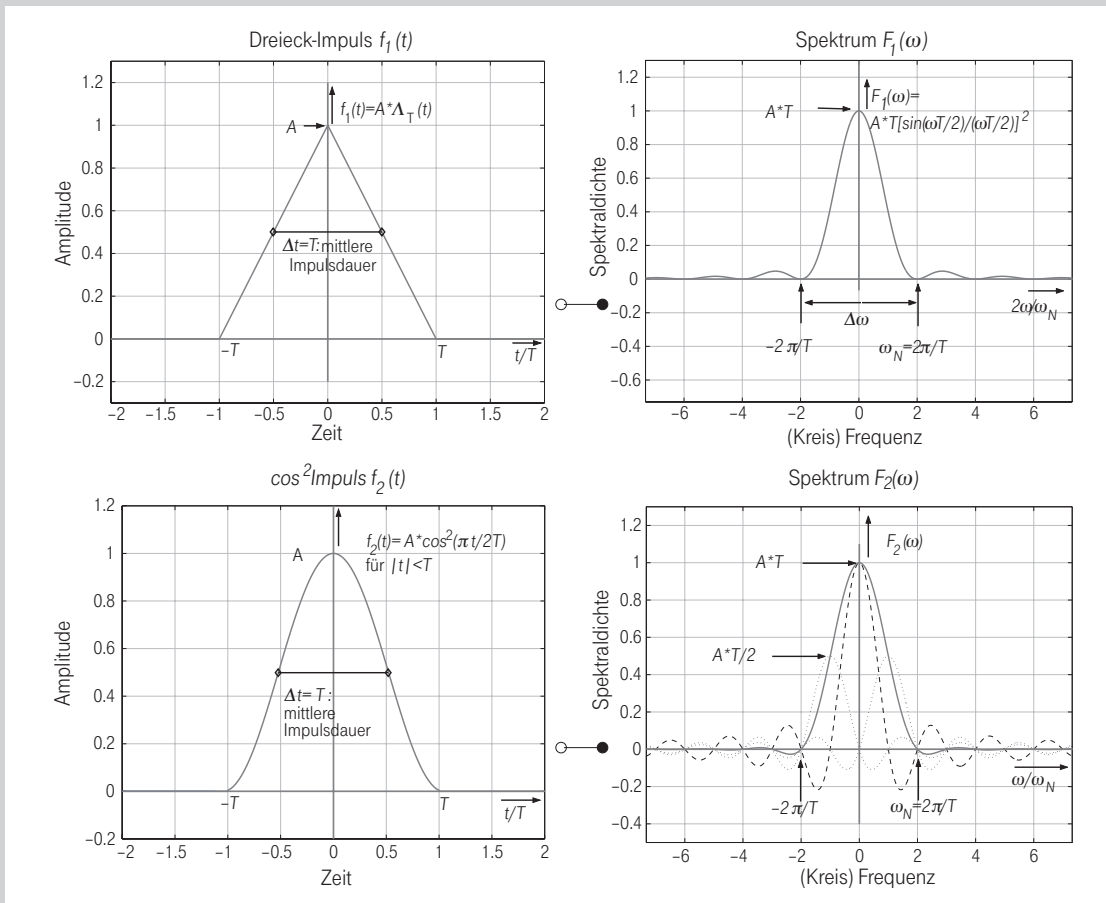
Unterrichtsblätter

Bild 22:  
Beispiel für den  
Ähnlichkeitsatz  
(Rechteckimpuls)



Unterrichtsblätter

Bild 23:  
Mittlere Impuls-  
dauer und Band-  
breite des Haupt-  
maximums der  
Spektralverteilung  
(Dreieck- und  
 $\cos^2$ -Impuls)



Unterrichtsblätter



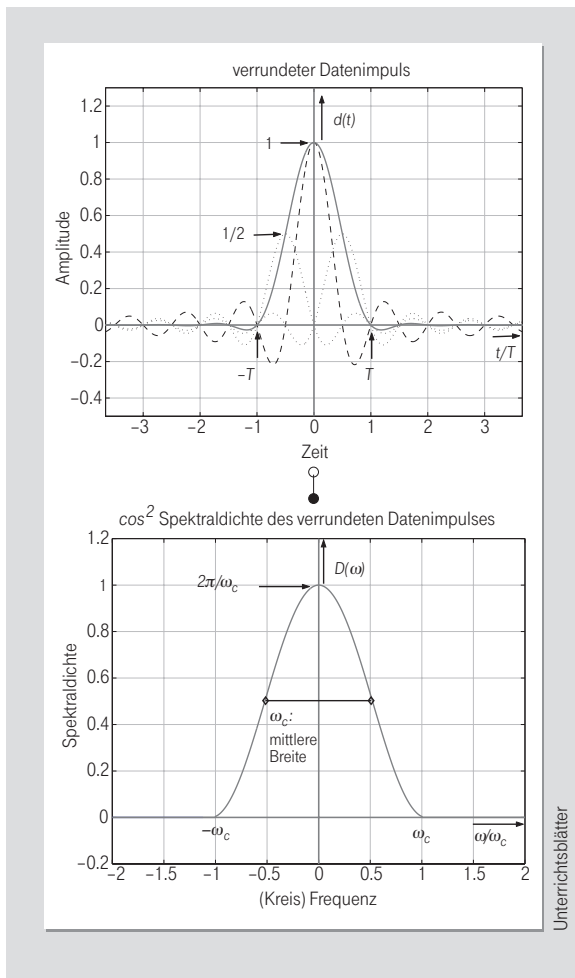


Bild 24: Verrundeter Datenimpuls mit endlicher Bandbreite (Verrundung im Spektrum nach  $\cos^2$ )

Folgende Beziehung

$$\text{Breite des Rechteck-Impulses } \Pi \leftrightarrow \text{Nullstellenabstand} = 2\pi / \text{Breite des Rechteck-Impulses}$$

gilt sowohl bei der Transformation vom Zeitbereich in den Frequenzbereich als auch im umgekehrten Fall.

Nimmt man nun noch den Satz über die Zentralordinate Gleichung (1.36), (1.37) hinzu, lassen sich die beiden Korrespondenzen in Bild 20 unmittelbar überprüfen.

Die Vorgehensweise beim grafischen Verfahren zur Durchführung der Vertauschung geschieht allgemein nach einem ähnlichen Verfahren<sup>25</sup>:

- Gewinnung der Amplitudenwerte mit Zentralordinaten-Satz
- Ersatz von Zeitmarken (z. B.  $T$ ) durch Frequenzmarken (z. B.  $\Omega$ ), also  $T \rightarrow \Omega$ .
- In der Transformierten ergibt sich die entsprechende Stelle dann zu  $2\pi/T \rightarrow 2\pi/\Omega$ .

#### Technische Interpretation

Das Rechteck im Frequenzbereich

$\Pi_{\omega_c}(\omega)$  lässt sich auch als Durchlasskurve (Betrag der Übertragungsfunktion) eines „idealen“ Tiefpassfilters interpretieren. Die transformierte der Übertragungsfunktion hat die physikalische Bedeutung einer Impulsantwort (Antwort des Systems auf einen  $\delta$ -Impuls als Eingangssignal).

### 15.3.2 Vertauschungssatz für ungerade Funktionen

Das Bild 21 zeigt ein Beispiel für ungerade oder punktsymmetrische Funktionen. Die hier angegebenen Korrespondenzen werden im weiteren Verlauf mithilfe der grafischen Methode auf mehrere Arten hergeleitet<sup>26</sup>.

$$-\Pi_{T/2}(t+T/2) + \Pi_{T/2}(t-T/2) \leftrightarrow \bullet (2.19)$$

$$-j2T \cdot \sin^2(\omega T/2) / (\omega T/2)$$

$$-\omega_c/\pi \cdot \sin^2(t\omega_c/2) / (t\omega_c/2) \leftrightarrow \bullet (2.20)$$

$$-j\Pi_{\omega_c/2}(\omega + \omega_c/2) + j\Pi_{\omega_c/2}(\omega - \omega_c/2)$$

Das 1. Maximum der Funktion unter der  $\text{si}$ -Hüllkurve<sup>27</sup> hat den Betrag  $4T/\pi$  bzw.  $2\omega_c/\pi^2$ . Bei ungeraden Funktionen kommt das Minuszeichen zum Tragen, denn es gilt  $f_0(-t) = -f_0(t)$ . Für den Normalfall, dass die Zeitfunktion reell ist, wird die grafische Gewinnung der gespiegelten Korrespondenz trotzdem einfach (s. Bild 21). Für eine reelle, ungerade Zeitfunktion gilt:

$$f_0(t) \leftrightarrow \bullet jF_0(\omega)$$

Die Vertauschung ergibt:

$$jF_0(t) \leftrightarrow \bullet 2\pi f_0(-\omega)$$

Die neue Zeitfunktion ist folglich imaginär. Damit diese reell wird, multipliziert man die ganze Korrespondenz mit  $-j$  durch. Dann ergibt sich:

$$F_0(t) \leftrightarrow \bullet -j \cdot 2\pi f_0(-\omega) = j \cdot 2\pi f_0(\omega) (2.21)$$

Man darf also in diesem Fall die Vertauschung grafisch genauso einfach durchführen wie im geraden Fall, vorausgesetzt, die Zeitfunktion ist reell.

Wie am Beispiel der Korrespondenzen des Bildes 21 zu sehen ist, sind die Punktsymmetrien von Zeitfunktion und Spektralverteilung zueinander spiegelbildlich, d. h. es gilt (symbolisch dargestellt):

Zeitfunktion	Spektralverteilung
reell	$\circ \bullet$ imaginär
$\vee/\wedge$ (Verlauf)	$\circ \bullet$ $\wedge/\vee$ (Verlauf)

(2.22)

Das Bild 21 zeigt noch eine weitere typische Eigenschaft:

Tritt in einem Bereich ein Rechteckimpuls  $\Pi$  auf, so ist in der transformierten eine  $\text{sin}(x)/x$ -Funktion zu finden, hier z. B. in Form einer Hüllkurve.

#### Technische Interpretation

Die 1. Korrespondenz in Bild 18 stellt ein Biphase-Grundelement mit der zugehörigen Spektralverteilung dar. Biphase ist ein spezieller Leitungscode zur Datenübertragung, bei dem jedes Bit entsprechend umcodiert wird<sup>28</sup>.

Eine logische 0 wird dabei (symbolisch dargestellt) zu  $\vee/\wedge$ , während eine logische 1 zu  $\wedge/\vee$  wird. Der Vorteil dieses Code besteht darin, dass jedes nach Biphase umcodierte Bit eine Taktinformation enthält. Grundsätzlich wird die Taktinformation empfangsseitig zur Auswertung von übertragenen Daten benötigt, weil anderenfalls keine Bit-, Symbol- oder Rahmen-Synchronisation erfolgen kann. Bei der Biphase-Codierung ist die Taktückgewinnung besonders einfach. Der Nachteil besteht allerdings darin, dass die 1. Nullstelle in der Spektralverteilung bei  $2\pi/T$  liegt und damit doppelt so weit entfernt ist wie bei der Spektralverteilung eines Einzelbits, die bei  $\pi/T$  liegt. Ein mit Biphase codierter Datenstrom benötigt daher die doppelte Bandbreite wie ein uncodierter Datenstrom<sup>29</sup>.

Die 2. Korrespondenz in Bild 21 stellt die Übertragungsfunktion eines Hilbert-Filters und dessen Impulsantwort dar. Ein Hilbert-Filter ist ein Filter, das ein ganzes Frequenzband um  $90^\circ$  in der Phase

<sup>25</sup> Hier wurde dies am Beispiel der Transformation vom Zeitbereich in den Frequenzbereich dargestellt.

<sup>26</sup> Die Herleitungen der Korrespondenzen des Bildes 21 können z. B. auf folgende Arten geschehen: Modulationsatz, Faltungssatz, Zeitverschiebungssatz. Das Bild 21 kann daher auch als Beispiel für diese Sätze dienen.

<sup>27</sup> Siehe hierzu den Beitrag „Spektraleigenschaften periodischer Zeitfunktionen“, Unterrichtsblätter Nr. 2/2002, S. 70–78.

<sup>28</sup> Der Biphase Code wurde anfänglich auch bei der Speicherung von Daten z. B. auf der Floppy verwendet. Er ist heute noch in Gebrauch beim Radio Daten System (RDS), das im UKW-Rundfunk u. a. zur Senderkennung dient.

<sup>29</sup> Mittlerweile wurden andere, Bandbreite sparende Methoden der Übertragung von Taktinformationen entwickelt.

dreht. Das Hilbert<sup>30</sup>-Filter findet z. B. eine Anwendung bei der Erzeugung der Einseitenband-Modulation (nach der Phasemethode). Diese Methode ist besonders für eine Realisierung mithilfe von digitaler Signalverarbeitung geeignet.

### 15.4 Ähnlichkeit und Zeit-Bandbreiten-Gesetz

Für die zu  $f(t)$  ähnliche Funktion  $f(at)$  gilt

$$f(at) \circlearrowleft 1/|a| \cdot F(\omega/a) \quad (2.23)$$

Hierbei ist  $a$  ein reeller Skalierungsfaktor, für welchen gilt:

$|a| > 1$ :  $f(at)$  ist gegenüber  $f(t)$  gepresst.

$|a| < 1$ :  $f(at)$  ist gegenüber  $f(t)$  gedehnt.

#### Beweis

$$\begin{aligned} (\text{für } a > 0) \int_{-\infty}^{\infty} f(at) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ = 1/a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-j(\omega/a)x} dx \\ = 1/a \cdot F(\omega/a) \end{aligned}$$

#### Ähnlichkeit mit grafischer Methode

Das Beispiel des Bildes 22 zeigt, dass in der Praxis die Formel Gleichung (2.23) nicht in jedem Falle angewendet werden muss, wenn man

- den Zentralordinaten-Satz anwendet und
- für die Marken im Zeit- und Frequenzbereich die entsprechenden Werte einsetzt.

Für den speziellen Wert  $a = -1$  erhält man:

$$f(-t) \circlearrowleft F(-\omega) \quad (2.24)$$

Für den Fall, dass  $f(t)$  reell ist, folgt:

$$\begin{aligned} F(-\omega) = F^*(\omega); \\ F^*(\omega) \text{ ist konjugiert} \\ \text{komplex zu } F(\omega) \end{aligned} \quad (2.25)$$

#### 15.4.1 Zeit-Bandbreiten-Gesetz der Nachrichtentechnik

Der Ähnlichkeitssatz ist eine spezielle Variante des wesentlich allgemeiner gültigen (und anwendbaren) Zeit-Bandbreiten-Gesetzes der Nachrichtentechnik.

Bezogen auf die Markierungen  $\Delta t$  und  $\Delta \omega$  des Bildes 22 erkennt man unmittelbar, dass für ähnliche Funktionen gilt:

$$\Delta t \cdot \Delta \omega = \text{const.} \quad (2.26)$$

Der Zahlenwert der Konstanten ist abhängig von der (willkürlichen) Festlegung der Marken im Zeit- und Frequenzbereich.

Im Beispiel des Bildes 22 gilt:

$$\Delta t \cdot \Delta \omega = 4\pi$$

Die Gleichung (2.26) lässt sich auch schreiben als:

$$\Delta t \sim 1/\Delta \omega \quad (2.27)$$

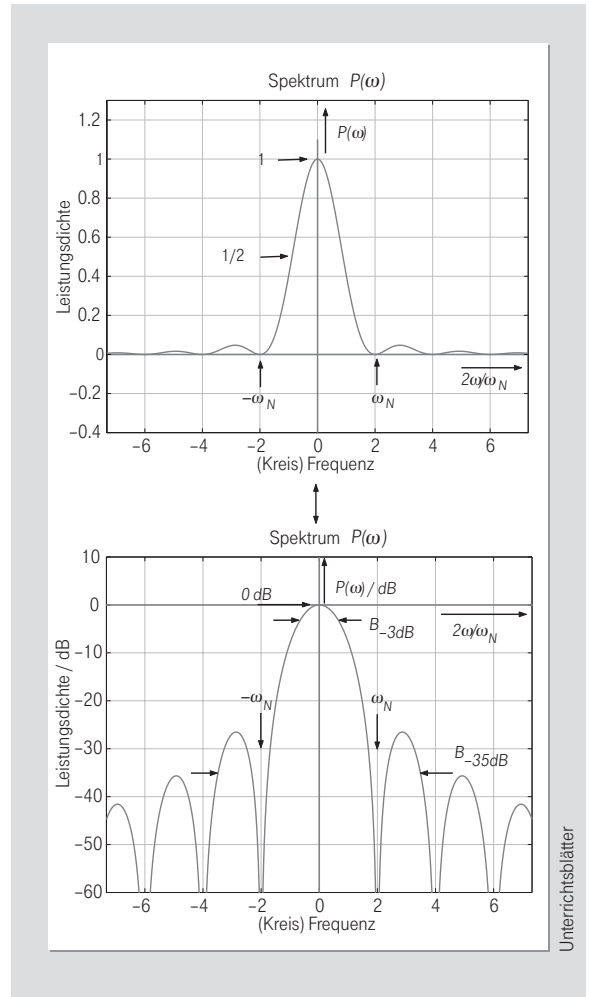
Man erkennt daraus, dass Zeitdauer und Spektraldichte in einem reziproken Verhältnis zueinander stehen. Da dies wiederum als eine spezielle Form einer Unschärfe-Relation angesehen werden kann, lassen sich aus Gleichung (2.27) weitere für die praktische Anwendung wichtige Zusammenhänge ableiten.

Zeitbereich	Frequenzbereich
■ schnelle Vorgänge ( $\Delta t \rightarrow 0$ )	hohe Frequenzen ( $\Delta \omega \rightarrow \infty$ )
■ scharfe Flanken	breite Spektralverteilung (sehr) breit
■ (sehr) schmal begrenzt (endlich)	unbegrenzt ( $\rightarrow \infty$ )
■ $\infty$ lange andauernd	endliche Bandbreite
■ langsame Vorgänge ( $\Delta t \rightarrow \infty$ )	tiefe Frequenzanteile ( $\Delta \omega \rightarrow 0$ )
■ weiche Flanken	schmale Spektralverteilung

Diese Liste lässt sich sinngemäß beliebig verlängern. Die Kenntnis dieser Zusammenhänge ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Lösung praktischer Probleme in der Übertragungstechnik.

#### Anwendung auf verrundete Datenimpulse

- Datenimpulse müssen verrundet werden (weiche Flanken), wenn die benötigte Übertragungsbandbreite eingeschränkt werden soll. Dieser Fall tritt immer auf, wenn Daten übertragen werden<sup>31</sup>.
- Betrachtet man in solchen Fällen die mittlere Impulsbreite ( $T$  in Bild 23), so gilt für Impulsformen mit punkt-symmetrischen Flanken, dass das Hauptmaximum im Spektrum bis  $2\pi/T$  (mittlere Impulsbreite) geht<sup>32</sup>. In der praktischen Anwendung wird die Verrundung so gewählt, dass das zu übertragende Spektrum gerade bis  $2\pi/T$  (mittlere Impulsbreite) reicht.
- Wird eine endliche Bandbreite für Datenimpulse gefordert, so kann man nach dem Vertauschungssatz die Spektralverteilung entsprechend vorgeben.



Unterrichtsblätter

Der Zeitverlauf des verrundeten Datenimpulses erhält damit Nebenmaxima (Bild 24). Damit diese Nebenmaxima die anderen Datenimpulse nicht störend beeinflussen, ist die Datenrate so zu wählen, dass das Maximum des nächsten Impulses auf die Nullstelle (in Bild 24:  $T$ ) des vorherigen fällt. Diese Bedingung wird 1. Nyquist<sup>33</sup>-Bedingung genannt und spielt bei den digitalen Modulationsarten eine wichtige Rolle.

Bild 25: Bandbreite der spektralen Leistungsdichte von rechteckförmigen Daten-Symbolen

<sup>30</sup> Hilbert, David (1862–1943): deutscher Mathematiker, der in Königsberg und seit 1895 in Göttingen lehrte. Er verfasste Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie (1899) und über die Invarianten- und höhere Zahlentheorie sowie über lineare Integralgleichungen.

<sup>31</sup> Deswegen sind Daten auf dem Übertragungsweg stets analoge Signale, die im Empfänger digital interpretiert werden müssen. Dabei entstehen dann die Übertragungsfehler (Symbol- und Bitfehler).

<sup>32</sup> Dies gilt für die 1. Nullstelle der Spektralverteilung.

<sup>33</sup> H. Nyquist (1889–1976): amerikanischer Elektrotechniker, der u. a. das grafische Verfahren zur Stabilitätsanalyse geschlossener Regelkreise entwickelt hat.



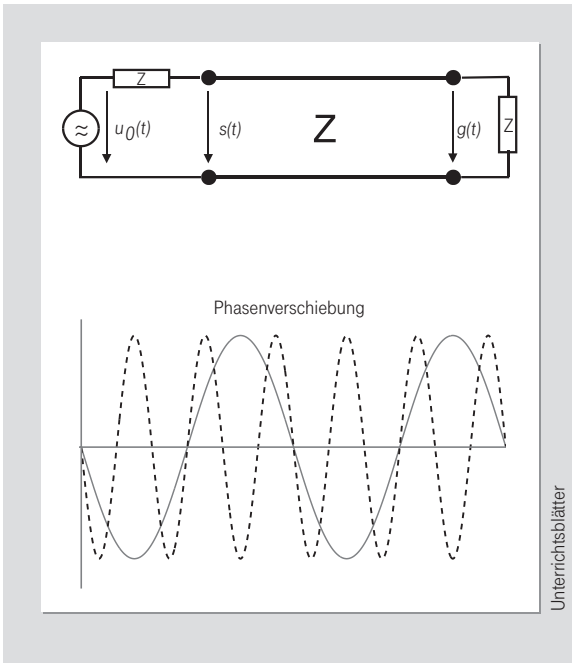
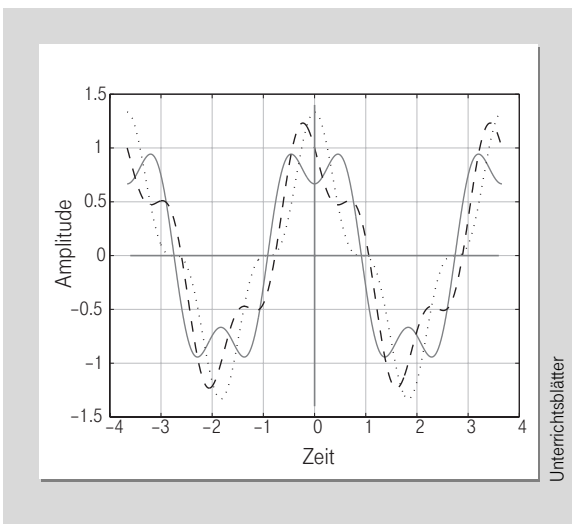


Bild 26:  
Verlustlose  
Leitung mit  
Anpassung

### 15.4.2 Bandbreiten-Dilemma bei praktischen Übertragungsproblemen

Für einen Übertragungskanal wird gefordert, dass er nur endlich breit sein darf, d. h. die Spektralverteilung der darin übertragenen Signale soll außerhalb des Kanals verschwindend klein sein. Theoretisch könnte die Forderung aufgestellt werden, dass die Spektralverteilung außerhalb des Übertragungskanals gleich Null ist, weil in den Nachbarkanälen keinerlei Störungen zugelassen sind. Eine derartig absolute Forderung ist nach dem Zeit-Bandbreiten-Gesetz jedoch nur erfüllbar, wenn die übertragenen Signale unendlich lange andauern würden. Daher gibt es je nach Anforderung verschiedene Definitionen für die zulässige Bandbreite,

Bild 27:  
Darstellung  
(linearer) Signal-  
verzerrungen,  
verursacht durch  
frequenzabhängige  
Laufzeiten  
auf Grund von  
nichtlinearem  
Phasengang



wie es in Bild 25 veranschaulicht wird. Es handelt sich um die spektrale Leistungsdichte rechteckförmiger Daten. Hierfür gilt:

$$P(\omega) = F(\omega) \cdot F^*(\omega) = |F(\omega)|^2 \quad (2.28)$$

Das Beispiel macht auch deutlich, dass es in der Praxis keinen eindeutigen Wert für „die Bandbreite“ gibt. Vielmehr muss immer noch zusätzlich spezifiziert werden, was darunter verstanden werden soll. Es lassen sich daher verschiedene Leistungs-Bandbreiten definieren, abhängig von den praktischen Bedürfnissen, z. B.:

- 3-dB-Bandbreite (halbe Leistung bzw.  $1/\sqrt{2}$ -fache Spannung),
- Breite des flächengleichen Rechtecks (Rechteck mit gleicher Leistung, auch äquivalente Rauschbandbreite),
- Breite zwischen den 1. Nullstellen der Spektralverteilung,
- Breite, innerhalb derer 99 Prozent der Leistung übertragen wird (20-dB-Breite),
- Breite, außerhalb derer die spektrale Leistungsdichte  $< -35$  dB ist,
- Breite, außerhalb derer die spektrale Leistungsdichte  $< -50$  dB ist,
- Breite, außerhalb derer die spektrale Leistungsdichte  $< -90$  dB ist.

Die Bandbreiten entsprechend der drei letzten Beispiele spielen eine Rolle, wenn die Störwirkung einer Übertragung auf Nachbarkanäle (Adjacent Channel Interference = ACI) quantifiziert werden soll. Bei Rundfunk- oder Satelliten-Sendern gibt es beispielsweise das Problem der Randaussendungen. Dies sind die spektralen Anteile, die ein Sender außerhalb des ihm zugewiesenen Frequenzbandes (Übertragungskanal) noch aussenden darf. Die entsprechenden Vorschriften hierzu werden von der ITU (International Telecommunications Union) beschlossen. Über die Einhaltung der Vorschriften wacht die jeweilige nationale Fernmeldeverwaltung.

### 15.5 Zeitverschiebung

Signale erfahren bei der Übertragung eine zeitliche Verzögerung<sup>34</sup>. Zwischen Ein- und Ausgangssignal besteht dann eine Zeitverschiebung, die z. B.  $t_0$  sein soll ( $t_0$ : Signallaufzeit). Eine Zeitverschiebung hat in der Spektralverteilung eine Phasendrehung zur Folge. Man stellt hierfür die Spektraldichte nach Betrag und Phase dar.

### 15.5.1 Zeitverschiebung und lineare Phasendrehung

Für die um die Zeit  $t_0$  verschobene Funktion  $f(t - t_0)$  gilt (Das Minuszeichen ist mit einem Pfeil markiert):

$$f(t \downarrow t_0) \circ \bullet F(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \quad (2.29)$$

$$A(\omega) \cdot e^{j(\varphi(\omega) - \omega t_0)} \quad (2.30)$$

$$A(\omega) \cdot e^{j(\varphi(\omega) - \phi(\omega))} \quad (2.31)$$

- $f(t - t_0)$  ist nach rechts verschoben.
- $f(t + t_0)$  ist nach links verschoben.

In diesen Gleichungen ändern sich bei Linksverschiebung die durch Pfeile  $\downarrow$  markierten Vorzeichen von  $-$  in  $+$ .

#### Beweis

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0) \cdot e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-j\omega(t_0+x)} dx \\ &= e^{-j\omega t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-j\omega x} dx \\ &= e^{-j\omega t_0} \cdot F(\omega) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass sich eine Zeitverschiebung nur auf die Phasendrehung der Spektraldichte auswirkt.

#### Zeitverschiebung $\circ \bullet$ Phasendrehung der Spektraldichte

Diese Phasendrehung ist proportional zur Frequenz, d. h. die Phase ist linear:

$$\phi(\omega) = \omega \cdot t_0; \quad t_0: \text{Signal-Laufzeit, Zeitverschiebung} \quad (2.32)$$

#### Signal-Laufzeit auf einer Leitung

Dass die Phase  $\phi(\omega)$  sich entsprechend Gleichung (2.32) ändert, kann man sich leicht mithilfe einer (verlustlosen und angepassten) Leitung klar machen:

Diese Leitung habe die Länge  $l_0$  und das Signal benötige zum Durchlaufen von  $l_0$  gerade die Zeit  $t_0$  (Signal-Laufzeit). Nun betrachtet man (zur Vereinfachung) sinusförmige Signale (z. B. mit den Frequenzen  $\omega_1$ ,

<sup>34</sup> Erfährt das Signal nur eine Zeitverzögerung, ohne dass seine Form verändert wird, wird das betreffende Übertragungssystem als „verzerrungsfrei“ bezeichnet. Eine Veränderung der Amplitude ist dabei zulässig, weil dadurch die Ähnlichkeit nicht verändert wird. Häufig wird das Signal am Ausgang des Übertragungssystems eine geringere Amplitude aufweisen.

$2\omega_1, \dots$ ), die jeweils zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf die Eingänge von (entsprechend vielen genau gleichartigen) Leitungen der Länge  $l_0$  gegeben werden (Bild 26). Wenn der Einschaltzustand jeweils nach der Laufzeit  $t_0$  am Ende einer Leitung angekommen ist, wird der Potenzialverlauf auf den Leitungen betrachtet.

Es soll sich z. B. auf der 1. Leitung eine Periode der Schwingung mit der Frequenz  $\omega_1$  befinden. Dann sind auf der 2. Leitung zwei Perioden von  $2\omega_1$ , auf der 3. Leitung drei Perioden von  $3\omega_1$  usw. Die Phase  $\phi$  ist dabei jeweils zwischen Ein- und Ausgang der Leitung (allgemein: des Übertragungssystems) zu betrachten. Damit besteht für die Frequenz  $\omega_1$  (in diesem Beispiel) eine Phasenverschiebung von  $4\pi$ , für die Frequenz  $2\omega_1$  eine Phasenverschiebung von  $2 \cdot 4\pi$  usw.

Die Phasenverschiebung (zwischen Ein- und Ausgang) ist also proportional zur Frequenz, wenn die Laufzeit konstant ist. Es gelten diese Verhältnisse offensichtlich nicht nur für ganze Vielfache von  $\omega_1$ , sondern für beliebige Frequenzen.

### 15.5.2 Signal-Laufzeit bei Systemen mit nichtlinearer Phase

Aus dem Vorausgehenden folgt unmittelbar, dass für Übertragungssysteme, die keine lineare Phase haben, die zu den einzelnen Spektralkomponenten gehörigen Teilsignale eine unterschiedliche Laufzeit haben<sup>35</sup>.

Da sich das Gesamtsignal am Ausgang eines Übertragungssystems nach dem Überlagerungssatz aus den Teilsignalen zusammensetzt, ergibt sich bei nicht konstanten Signallaufzeiten eine andere Form als die, die das Signal am Eingang hatte. Dies wirkt sich speziell bei (Daten-)Impulsen nachteilig aus (Impulsverzerrungen, Dispersion). Eine nichtlineare Phase bewirkt frequenzabhängige Laufzeiten und diese führen zu (linearen) Signalverzerrungen (Bild 27).

#### Lineare und nichtlineare Signalverzerrungen

Signalverzerrungen infolge nichtlinearer Phasenverläufe werden als lineare Verzerrungen bezeichnet. Im verzerrten Ausgangssignal sind keine neuen Frequenzkomponenten enthalten. Mithilfe eines Laufzeit-Entzerrers lässt sich die ursprüngliche Signalförmigkeit wieder herstellen. Dies wird bei der Digitalübertragung praktisch immer angewendet.

Signalverzerrungen infolge nichtlinearer Aussteuerungs-Kennlinien (Verstärkungs-Kennlinien) von Übertragungssystemen erzeugen nicht-lineare Verzerrungen. Hier sind im Ausgangssignal **zusätzliche Frequenzkomponenten** enthalten. Eine Entzerrung ist hier schwieriger. Die zusätzlich entstandenen Spektralanteile lassen sich praktisch nie restlos beseitigen, sondern nur abschwächen. Unerwünschte nicht-lineare Verzerrungen entstehen z. B. bei Übersteuerungen von Systemen. Eine Anwendung des Effekts sind die (analogen) Rauschunterdrückungs-Verfahren, wie z. B. Dolby<sup>36</sup>.

### 15.5.3 Zur Darstellung der Spektralverteilung zeitverschobener Signale

Es ergeben sich besonders einfache Zusammenhänge zwischen Zeitfunktionen und Spektraldichten, wenn folgende Fälle vorliegen (s. Bild 18):

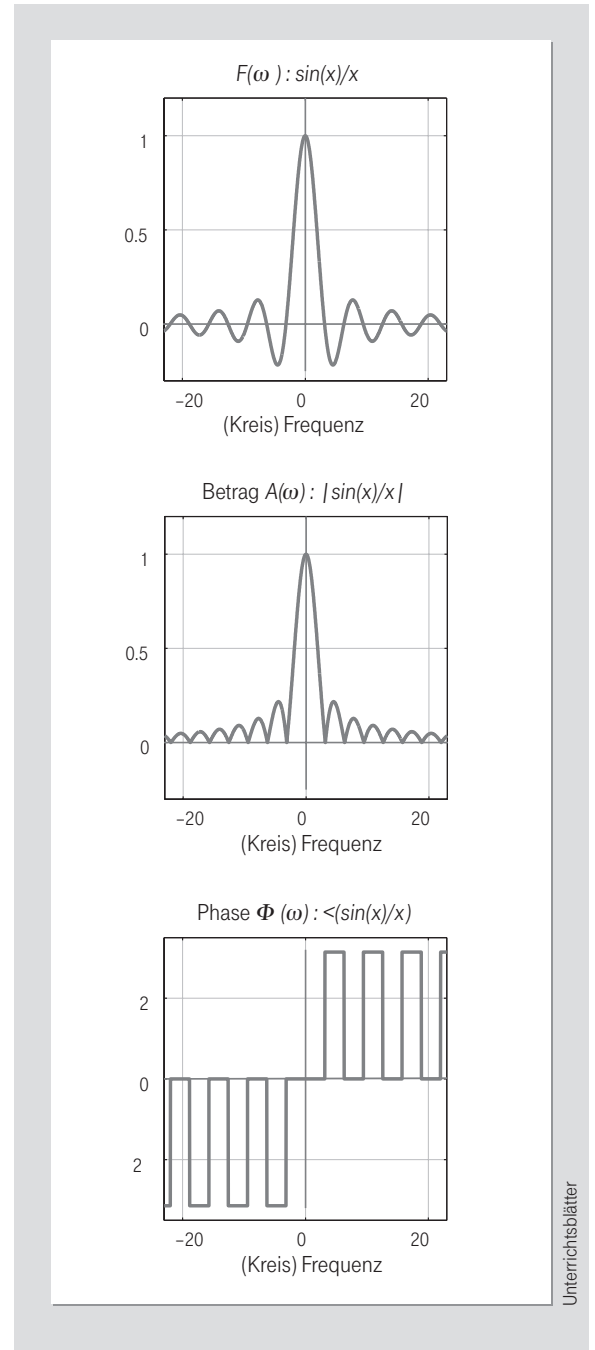
$$\underbrace{f_e(t)}_{\text{reell und gerade}} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{F_e(\omega)}_{\text{reell und gerade}} \quad (2.33)$$

$$\underbrace{f_o(t)}_{\text{reell und ungerade}} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{jF_o(\omega)}_{\text{imaginär und ungerade}} \quad (2.34)$$

Diese Fälle werden gerne für Beispiele verwendet, weil sie sich bequem zeichnerisch darstellen lassen. Die Spektraldichte wird dabei als reell bzw. imaginär dargestellt. Auf Grund einer Zeitverschiebung ergibt sich in der Spektraldichte eine Phasendrehung. Zur grafischen Darstellung ist dann jedoch die kartesische Schreibweise ungeeignet, da die Phase zur polaren Schreibweise gehört. Als Ausweg bieten sich an:

- Darstellung der Spektraldichte nach Betrag und Phase
- Dreidimensionale Darstellung als „Schraubenlinie“

Bei der Darstellung nach Betrag und Phase ist zu beachten, dass per Definition Beträge nur positiv sein können. Beim Übergang von der kartesischen Darstellung (real, imaginär) zur polaren Darstellung (Betrag, Phase) sind negativ reelle Teile dann als positive Beträge zusammen mit einer Phase von  $\pi$  darzustellen, wie es Bild 28 am Beispiel der Spektraldichte eines Rechteckimpulses zeigt. Man benötigt also in der polaren Darstellung in jedem Fall zwei Grafen. Alternativ dazu



kann auch eine dreidimensionale Darstellung gewählt werden, wie in Bild 29 gezeigt.

Bild 28: Beispiel für eine polare Darstellung

#### Übungsbeispiel zur Zeitverschiebung

Die Spektraldichte in Bild 17 wurde mit dem Linearitätssatz bestimmt.

<sup>35</sup> Messtechnisch wird hierbei zwischen Phasen- und Gruppenlaufzeit unterschieden. Die Phasenlaufzeit bezieht sich auf eine einzelne harmonische Schwingung, während sich die Gruppenlaufzeit auf eine „Frequenzgruppe“, z. B. die Spektralanteile eines Impulses oder eines modulierten Signals, bezieht.

<sup>36</sup> Dolby: Verfahren zur Verbesserung des Störabstandes in elektroakustischen Geräten durch das Prinzip der Kompanierung (Kompressor und Expander).

### 15.5.4 Technische Anwendung „Kammfilter“

Das Kammfilter<sup>38</sup> ist ein Beispiel für die technische Anwendung des Zeitverschiebungssatzes. Es ist darüber hinaus ein Paradebeispiel dafür, wie mittels der Digitalen Signalverarbeitung Filterfunktionen realisiert werden können.

Gegeben sei eine Parallelschaltung von zwei verzerrungsfreien Systemen (beispielsweise zwei angepasste verlustfreie Leitungen unterschiedlicher Länge) mit den Laufzeiten<sup>39</sup>  $t_0$  und  $t_0 + \Delta t$  (Bild 32).

Für die Ausgangsspannung  $u_a(t)$  ergibt sich nach Bild 32, wenn  $u_e(t)$  die Eingangsspannung sein soll:

$$u_a(t) = u_e(t - t_0) + u_e(t - t_0 - \Delta t) \quad (2.39)$$

Mit  $u_e(t) \circ \bullet U_e(\omega)$ ,  $u_a(t) \circ \bullet U_a(\omega)$  und dem Zeitverschiebungssatz wird daraus:

$$U_a(\omega) = U_e(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} + U_e(\omega) \cdot e^{-j\omega(t_0 + \Delta t)} \quad (2.40)$$

$$U_a(\omega) = U_e(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \cdot (1 + e^{j\omega \Delta t}) \quad (2.41)$$

$$U_a(\omega) = U_e(\omega) \cdot e^{-j\omega(t_0 + \Delta t/2)} \cdot (e^{j\omega \Delta t/2} + e^{-j\omega \Delta t/2}) \quad (2.42)$$

$$U_a(\omega) = U_e(\omega) \cdot e^{-j\omega(t_0 + \Delta t/2)} \cdot 2 \cdot \cos(\omega \Delta t/2) \quad (2.43)$$

Die Übertragungsfunktion des Kammfilters in Bild 29 wird damit:

$$H(\omega) = U_a(\omega)/U_e(\omega) = 2 \cdot \cos(\omega \Delta t/2) \cdot e^{-j\omega(t_0 + \Delta t/2)} \quad (2.44)$$

Daraus folgt für den Amplitudengang  $A(\omega)$  dieses Kammfilters:

$$A(\omega) = |H(\omega)| = 2 \cdot |\cos(\omega \Delta t/2)| \quad (2.45)$$

Bild 29: Auswirkung einer Zeitverschiebung auf die Spektraldichte: dreidimensionale und polare Darstellung

Nunmehr folgt die Herleitung der Korrespondenz der Bilder 16 und 17 mithilfe des Zeitverschiebungssatzes. Die beiden Rechteckimpulse der Zeitfunktion werden hierfür als zwei verschobene Pulse  $\Pi_{T/4}(t)$  interpretiert, wie in Bild 30 dargestellt ist.

$$f(t) = A \cdot \underbrace{\Pi_{T/4}(t + 3T/4)}_{\text{Linksverschiebung}} + A \cdot \underbrace{\Pi_{T/4}(t - 3T/4)}_{\text{Rechtsverschiebung}} \quad (2.35)$$

dichte aus zwei Teilen zusammen. Da jedoch der Linearitätssatz in der grafischen Methode für kompliziertere Fälle schwieriger anzuwenden ist<sup>37</sup>, wird eine Zwischenrechnung durchgeführt. Für das Rechteck gilt die Korrespondenz:

$$A \cdot \Pi_{T/4}(t) \circ \bullet \frac{AT}{2} \cdot \frac{\sin(\omega T/4)}{(\omega T/4)} \quad (2.36)$$

Daraus folgt für die Spektraldichte von  $f(t)$ :

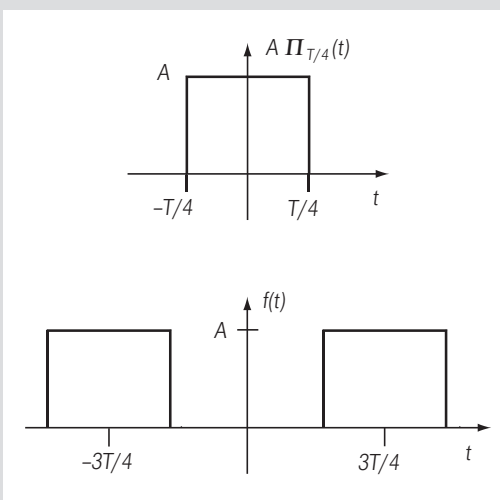
$$F(\omega) = AT/2 \cdot \sin(\omega T/4)/(\omega T/4) \cdot (e^{+j\omega 3T/4} + e^{-j\omega 3T/4}) \quad (2.37)$$

$$F(\omega) = \underbrace{AT}_{\substack{\text{Fläche} \\ \text{Zeit-} \\ \text{funktion}}} \cdot \underbrace{\frac{\sin(\omega T/4)}{(\omega T/4)}}_{\substack{\text{Hüllkurve} \\ \text{sf x}}} \cdot \underbrace{\cos(\omega 3T/4)}_{\substack{\text{Cosinus-} \\ \text{Schwingung}}} \quad (2.38)$$

Das Bild 31 zeigt diese Spektraldichte. Dieses Beispiel zeigt, dass die Gewinnung von Fourier-Transformationen auf verschiedene Arten möglich ist. Selbstverständlich kann man immer auch die zu transformierende Funktion in die Definitionsgleichung einsetzen und dann „darauf los rechnen“. Die hier benutzte Methode stellt aber nur scheinbar einen Umweg dar, denn durch die Anwendung der Sätze der Fourier-Transformation bekommt man bessere Einsichten in grundsätzliche Zusammenhänge. Damit wird es möglich, Problemstellungen elegant zu lösen und bekannte Lösungen auf neue Fragestellungen anzuwenden.

Bild 30: Die Zeitfunktion des Bildes 16 als zwei zeitverschobene  $\Pi_{T/4}(t)$

Da sich die Zeitfunktion  $f(t)$  in Gleichung (2.35) aus zwei Teilen zusammensetzt, setzt sich gemäß Linearitätssatz auch die Spektral-



Unterrichtsblätter

Das Bild 33 zeigt diesen  $|\cos|$ -förmigen Amplitudengang  $A_c(\omega)$  und den Phasengang. Man beachte die Phasensprünge infolge der Betragsbildung.

Eine Anwendung finden Kammfilter bei der Filterung periodischer Signale, deren Frequenzkomponenten gerade in die Durchlassbereiche fallen. Diesen Signalen überlagerte Störungen (wie z. B. Rauschen) können damit teilweise unterdrückt werden. Eine solche Anwendung findet z. B. beim Radar statt.

Werden in Bild 32 die Teilsignale subtrahiert anstatt addiert, entsteht ebenfalls ein Kammfilter. Wie aus dem Rechengang ersichtlich ist, entsteht dann jedoch  $j \cdot 2 \cdot \sin(\omega \Delta t / 2)$ , und damit ein Amplitudengang entsprechend Bild 34.

$$A_s(\omega) = |H_s(\omega)| = 2 \cdot |\sin(\omega \Delta t / 2)| \quad (2.46)$$

### Anwendung von Kammfiltern beim Farbfernsehen

Beim PAL-(Phase Alternation Line-) Farbfernsehen<sup>40</sup> ist die Farbinformation im Spektrum so zwischen die Helligkeitsinformation geschachtelt, dass beide mit einem Satz von Kammfiltern entsprechend zu den Bildern 33 und 34 empfangsseitig wieder getrennt werden können. Dadurch können Übersprecheffekte zwischen Helligkeit und Farbe vermieden werden – wie z. B. bunt schillernde Farben bei einem grauen Nadelstreifenanzug. Moderne TV-Geräte sind mit derartigen Filtern ausgestattet; konventionelle TV-Geräte nutzen „nur“ die Orthogonalität in den Modulationen von Helligkeit und Farbe aus.

### 15.5.5 Kammfilter als Prototyp des Zwei-Wege-Funkkanals

Funksignale erreichen den Empfänger meist über mehrere Reflexionen, z. B. an Gebäuden im Falle des Mobilfunks. Man betrachtet hierzu die Funkwellen ähnlich wie Lichtstrahlen in der Strahlenoptik. Ein für den Empfänger ganz besonders schwieriger Fall ist das Zwei-Wege-Modell des Funkkanals, weil dadurch periodische Löschungen im Spektrum des Empfangssignales auftreten können, wenn bei-

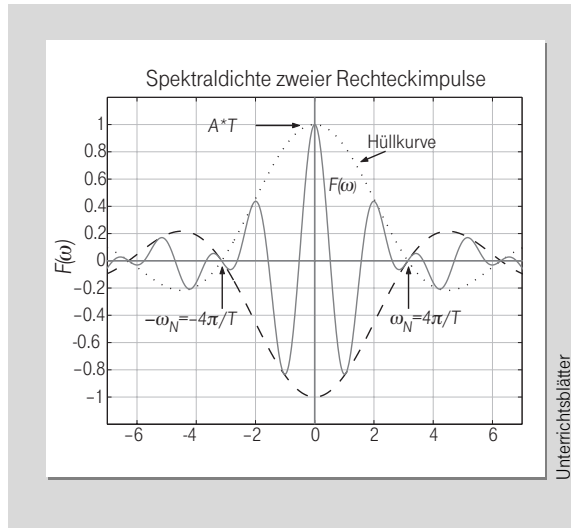


Bild 31: Spektraldichte  $F(\omega)$  der Zeitfunktion  $f(t)$  in Bild 30

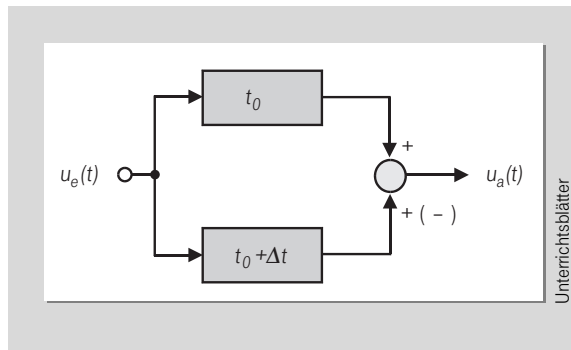


Bild 32: Kammfilter aus der Parallelschaltung zweier verzerrungsfreier Übertragungssysteme

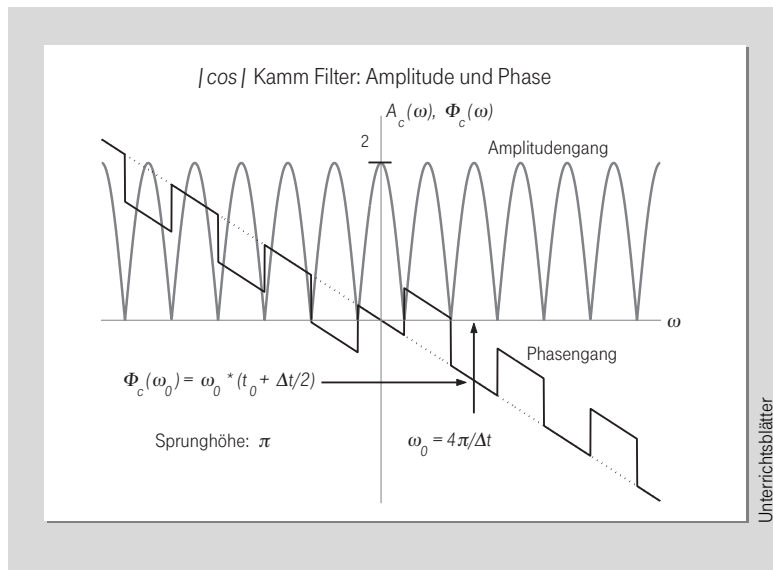


Bild 33: Amplituden- und Phasengang eines Kammfilters nach Bild 32. Bei der Summierstelle gilt das +Zeichen: Addition

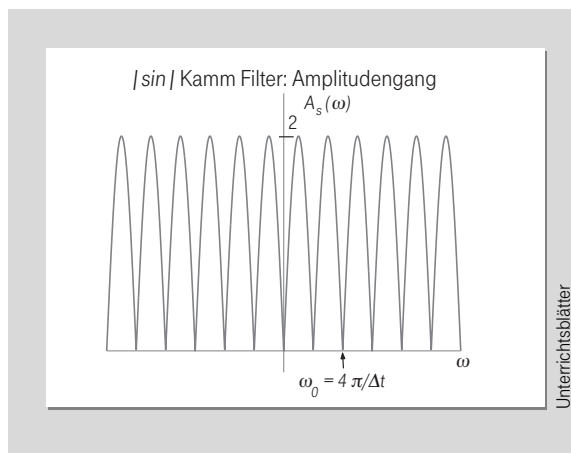
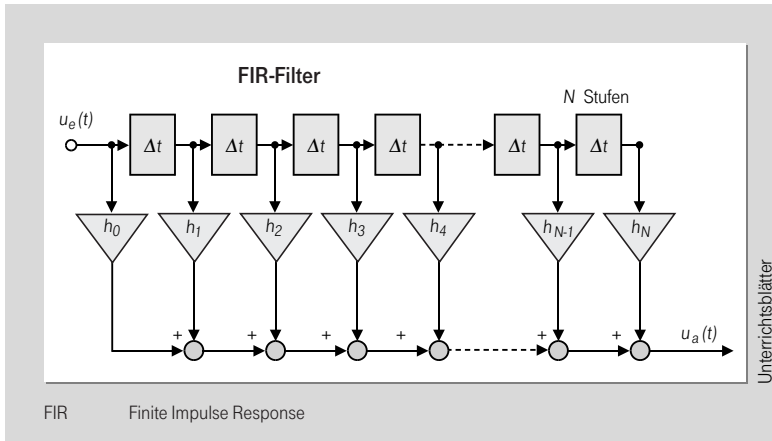


Bild 34: Amplitudengang des Kammfilters Bild 32, wenn die Ausgangssignale subtrahiert werden (-Zeichen in Bild 32)

<sup>40</sup> Das analoge PAL-Farbfernsehen wird künftig durch das digitale DVB-T (Digital Video Broadcast – Terrestrial) abgelöst. Die hierbei angewendete Modulationsart ist ein Mehrträger-Verfahren: COFDM (Coded Orthogonal Frequency Multiplex).

Bild 35:  
Transversale  
Filterstruktur,  
FIR-Filter



de Funk-Pfade gleiche Amplituden haben. In der Praxis haben Funkwege keine konstanten Parameter, so dass die „Löcher“ (notches) im Empfangsspektrum „wandern“. Wenn die Amplituden (und auch diese sind zeitveränderlich) der beiden Pfade nicht absolut gleich sind, ergibt sich nur eine teilweise Löschung.

### 15.5.6 Transversales Filter

Eine Verallgemeinerung des Bildes 32 führt auf die Struktur eines Transversalfilters. Hierbei werden mehrere verzerrungsfreie Systeme in Kette geschaltet und die Abgriffe gewichtet (bewertet) summiert (Bild 35).

Die transversale Filterstruktur entsprechend Bild 35 heißt FIR-(Finite Impulse Response-)Filter<sup>41</sup>. Sie besteht aus einer Kette von Laufzeitgliedern. Nach jedem Laufzeitglied wird das Signal abgezweigt und mit

einem Koeffizienten gewichtet. Alle gewichteten Anteile werden aufsummiert und bilden das Ausgangssignal. Soll ein FIR-Filter sperren, muss die gewichtete Summe aller abgegriffenen Teilspannungen den Wert 0 ergeben.

Für die Ausgangsspannung  $u_a(t)$  des Filters gilt:

$$u_a(t) = h_0 u_e(t) + h_1 u_e(t - \Delta t) + h_2 u_e(t - 2\Delta t) + \dots + h_N u_e(t - N\Delta t) \quad (2.47)$$

$$u_a(t) = \sum_{n=0}^N h_n \cdot u_e(t - n\Delta t) \quad (2.48)$$

Damit erhält man, wenn in der Transformation die Zeitfunktionen durch die Spektraldichten ersetzt werden:

$$U_a(\omega) = \sum_{n=0}^N h_n \cdot U_e(\omega) \cdot e^{-jn\omega\Delta t} \quad (2.49)$$

<sup>41</sup> FIR-Filter können mit exakt linearer Phase realisiert werden.

Daraus folgt die Übertragungsfunktion des Transversalfilters:

$$H(\omega) = U_a(\omega)/U_e(\omega) = \sum_{n=0}^N h_n \cdot e^{-jn\omega\Delta t} \quad (2.50)$$

Gleichung (2.50) ist aber eine (komplexe) Fourier-Reihe einer über der Frequenz periodischen Funktion mit der Periode  $\Delta\Omega = 2\pi/\Delta t$ . Damit gilt für die Koeffizienten  $h_n$ :

$$h_n = 1/\Delta\Omega \cdot \int_{-\Delta\Omega/2}^{+\Delta\Omega/2} H(\omega) \cdot e^{jn\omega\Delta t} d\omega \quad (2.51)$$

Damit folgt sofort, dass die Gewichtskoeffizienten  $h_n$  gemäß der Impulsantwort  $h(t)$  der gewünschten Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  gewählt werden müssen ( $h(t) \rightarrow H(\omega)$ ).

Der Amplitudengang eines Transversalfilters entsprechend Gleichung (2.50) ist – als Konsequenz aus der Fourier-Reihe – periodisch über der Frequenz, d. h. es gibt nicht nur einen, sondern (theoretisch  $\infty$ ) viele Durchlassbereiche. Demzufolge besteht die Impulsantwort eines solchen Filters aus äquidistanten Linien ( $\delta$ -Impulsen). Das Bild 36 zeigt ein Beispiel für eine Impulsantwort des transversalen Filters (ohne Fensterung).

Da sich Verzögerungsstrukturen digital in Hardware recht einfach mithilfe von Schieberegistern realisieren lassen und zudem nur noch Multiplikationen und Additionen vorkommen, ist das transversale Filter die Grundstruktur eines digital realisierbaren Filters. Damit erweist sich der Zeitverschiebungssatz für die digitale Signalverarbeitung als von elementarer Wichtigkeit. Praktisch werden digitale Filter softwaremäßig realisiert. Für aufwendigere Anforderungen an die Filtereigenschaften werden Signalprozessoren oder programmierbare Logik verwendet. (Ge)

Der Beitrag wird fortgesetzt.

### Literaturhinweise

Bergmann, K.: Lehrbuch der Fernmelde-technik, Fachverlag Schiele & Schön, 5. Auflage 1986.

Lighthill, K.: Theorie der Fourier-Analyse, Hochschultaschenbücher Bd. 139, Bibliographisches Institut Mannheim.

Randall, R. B.; Tech, B. A.: Frequency Analysis, Brüel & Kjaer, 1977.

Lüke, H. D.: Signalübertragung, Springer 5. Auflage 1992.

Bracewell, R. N.: The Fourier Transform and its Applications, 2<sup>nd</sup> Ed. Revised, McGraw Hill, 1986.

Papoulis, A.: The Fourier Integral and its Applications, McGraw Hill, 1962.

Bild 36:  
Beispiel für die  
Impulsantwort  
eines Transversal-  
filters

