

# Diskrete Fourier-Transformation & Fast-Fourier-Transformation

## 1. Diskrete & Kontinuierliche Fourier-Transformation

Die Bedeutung der Diskreten Fourier-Transformation (DFT) in der Praxis rührt daher, daß es hierfür eine Implementierung auf dem Rechner gibt, die die DFT sehr schnell berechnen kann und deshalb „Fast Fourier Transform“ (FFT) heißt. Die Rechengeschwindigkeit ist dabei so groß, daß man damit Signalverarbeitung sogar in Echtzeit durchführen kann. Die Anwendungen dabei sind i.w.

- Berechnung des Spektrums
- Realisierung von Filtern (Typ: FIR)
- Datenreduktion für die Übertragung über bandbegrenzte Kanäle

Bild 1.1 zeigt ein Beispiel für ein kontinuierliches Signal  $g(t)$  und seine Spektralverteilung  $G(\omega)$  (Fourier-Transformation FT, links). Die daraus resultierende DFT (bzw. FFT) ist rechts dargestellt. Die Unterschiede zwischen den Ergebnissen von FT und DFT sind augenfällig.

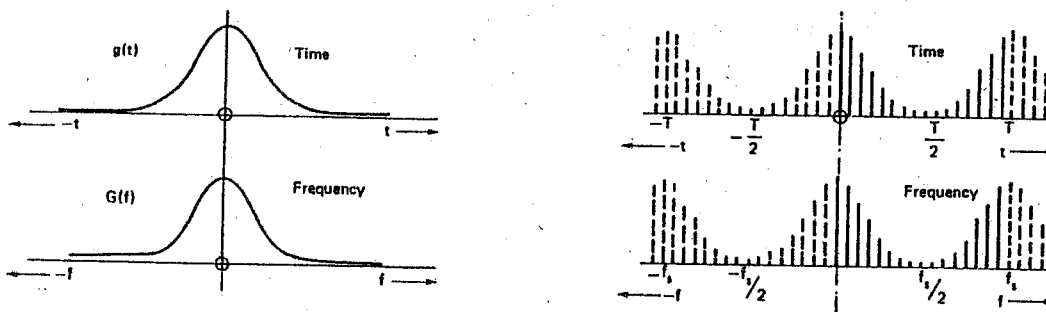


Bild 1.1: Beispiel für eine FT und eine DFT (bzw. FFT). Ausgegangen wird in beiden Fällen von der gleichen Zeitfunktion.

Wie das gewählte Beispiel in Bild 1.1 zeigt, ist das Zeitsignal  $g(t)$  nicht periodisch. Hierzu gehört eine kontinuierliche Spektralverteilung  $G(\omega)$  bzw.  $G(f)$ .

Eine Zeit-diskrete Darstellung kann nur äquidistante Abtastwerte von  $g(t)$  darstellen. Dazu gehört dann aber eine periodische Spektralverteilung. Bei der Berechnung im Digitalrechner kann jedoch die Spektralverteilung auch nur in äquidistanten Stützwerten (Abtastwerten) angegeben werden. Dazu gehört dann aber nach dem Vertauschungssatz eine periodische Zeitfunktion.

Damit sind die Funktionen bei der DFT bzw. FFT sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich grundsätzlich periodisch & bestehen aus äquidistanten Stützwerten.

Periodische Abtastwerte      ◯ — •      Periodische Abtastwerte

Wird die Periodizität im Zeit- und Frequenz-Bereich explizit betrachtet, wird von einer Digitalen Fourier-Reihe (Digital Fourier Series, DFS) gesprochen. Betrachtet man daraus jeweils nur die „primitive Periode“, heißt dies Digitale Fourier-Transformation (DFT), in Bild 1.1 durchgezogen gezeichnet. Zur Berechnung auf einem Rechner reicht dies ja auch vollkommen aus, weil mit einer Periode der ganze Rest bekannt ist.

Das bedeutet aber, daß sich die DFT aus der DFS dadurch ergibt, daß man die DFS nur durch ein  $\Pi$ -Fenster betrachtet.<sup>1</sup>

Da es offensichtliche Unterschiede zwischen FT und DFT gibt, ist das Ergebnis einer DFT nicht in jedem Fall die Darstellung eines Signals im Frequenzbereich. Vielmehr müssen noch gewisse Nebenbedingungen eingehalten werden, damit — bis auf einen dann praktisch zu vernachlässigenden Fehler<sup>2</sup> — das von der DFT berechnete „Spektrum“ tatsächlich ein Frequenz-Spektrum ist.

Die Herausarbeitung dieser Unterschiede ist von großer Wichtigkeit, weil nur die FT die Beschreibung der Signale im Spektrum liefert, wie sie auch meßtechnisch mit einem Spektrum-Analyzer ermittelt werden kann.<sup>3</sup>

## 2. Herleitung der DFT über eine DFS aus der FT

Die Herleitung erfolgt graphisch, Bild 2.1.

In Bild 2.1 wird im Frequenzbereich die natürliche Frequenz  $f$  und nicht die Kreisfrequenz  $\omega$  verwendet. Da sich  $f$  von  $\omega = 2\pi f$  um den Faktor  $2\pi$  unterscheidet, sind alle Flächen, die über  $f$  gebildet werden um  $2\pi$  kleiner als über  $\omega$ . Dies betrifft die Flächen der entsprechenden  $\delta$ -Funktionen im Frequenzbereich und die Berechnung der Zentralordinaten im Zeitbereich.

Für das ursprüngliche Signal gilt, Bild 2.1(a):

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \longleftrightarrow \quad H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.1)$$

Die Abtastung im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation mit einem  $\delta$ -Kamm. Daraus folgt im Frequenzbereich eine Faltung mit dem entsprechenden  $\delta$ -Kamm, Bild 2.1(b,c).

$$\delta_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \longleftrightarrow \quad \Delta_0(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T}); \quad \frac{2\pi}{T} = \omega_A \quad (2.2)$$

Damit wird also (Bild 2.1 (c):

$$h(t) \cdot \delta_0(t) \quad \longleftrightarrow \quad H(\omega) \overset{\left\{ \frac{1}{T} \right\}}{*} \Delta_0(\omega) \quad (2.3)$$

Aufgrund der periodischen Fortsetzung des Spektrums kommt es hier zu Überlappungen (Alias-Effekt): Das Spektrum der abgetasteten Zeitfunktion unterscheidet sich damit schon vom Spektrum des ursprünglichen Signals  $H(\omega)$ . Offensichtlich konnte die Abtastbedingung nicht eingehalten werden.

Die DFT arbeitet mit  $N$  Stützwerten im Zeit- und im Frequenz-Bereich. Dies entspricht der Registerlänge im Rechner. Aufgrund der endlichen Registerlänge kann daher nur ein Ausschnitt der ursprünglichen Zeitfunktion  $h(t)$  bearbeitet werden. Dies bedeutet eine Fensterung des Zeitsignals mit einem  $\Pi$ -förmigen Fenster, Bild 2.1(d).

$$x(t) = \Pi_{\frac{T_0}{2}}(t) \quad \longleftrightarrow \quad X(\omega) = T_0 \cdot \text{si}\left(\omega \frac{T_0}{2}\right) \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>Die Betrachtung durch ein  $\Pi$ -Fenster wird sich bei der Faltung auswirken; Man kommt dabei zur „Zirkularen Faltung“.

<sup>2</sup>Dieser Fehler wird mit Leakage bezeichnet. Für Filteranwendungen muß der Fehler  $\ll 10^{-4} \hat{=} -80\text{dB}$  sein.

<sup>3</sup>Das Spektrum, wie es die FT liefert, könnte mit einer Filterbank gemessen werden, deren Analyse-Filter die (theoretische) Bandbreite  $B = 0$  haben. Ohne Einschränkungen gilt dies nur für die FT, sonst für keine andere Transformation.

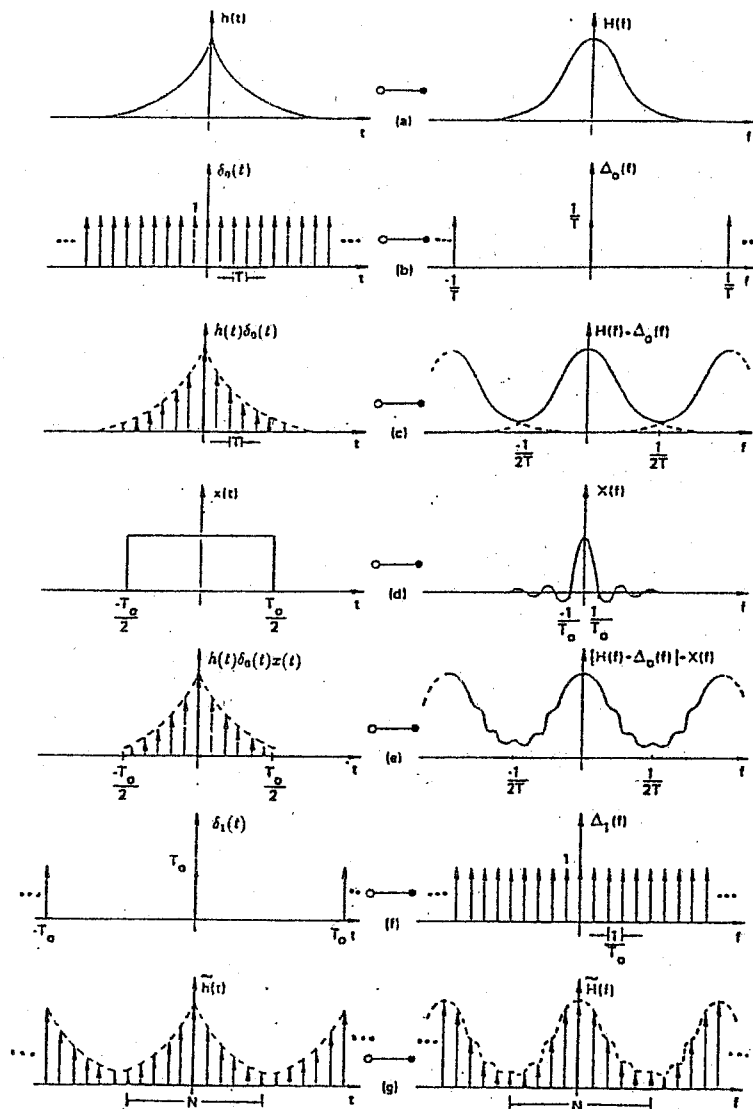


Bild 2.1: Beispiel für die graphische Herleitung der DFT aus einer DFS

Durch diese Fensterung im Zeitbereich wird der Spektralbereich mit der Transformierten  $X(\omega)$  des Fensters gefaltet, Bild 2.1(e).

$$h(t) \cdot \delta_0(t) \cdot X(t) \quad \longleftrightarrow \quad H(\omega) \cdot \left\{ \frac{1}{T_0} \right\} \Delta_0(\omega) \cdot \left\{ \frac{1}{T_0} \right\} X(\omega) \quad (2.5)$$

Da der Frequenzbereich im Rechner auch nur in Stützpunkten vorliegt, bedeutet dies hier eine Multiplikation mit einem  $\delta$ -Kamm, Bild 2.1(f,g).

$$\delta_1(t) = T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \quad \longleftrightarrow \quad \Delta_1(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T_0}); \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (2.6)$$

Damit entstehen schließlich die **periodischen Funktionen**  $\tilde{h}(t) \longleftrightarrow \tilde{H}(\omega)$ , die zugleich aus **äquidistanten Stützpunkten** bestehen, Bild 2.1(g). Dies ist die Digitale Fourier-Reihe (DFS). Die Tilde  $\sim$  dient der Hervorhebung der Periodizität.

$$\tilde{h}(t) = h(t) \cdot \delta_0(t) \cdot x(t) * \delta_1(t) \quad (2.7)$$

$$\tilde{H}(\omega) = H(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} \Delta_0(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} X(\omega) \cdot \Delta_1(\omega)$$

Das Problem bei der DFT bzw. FFT ist, daß die Bedingungen

$$\text{Hüllkurve von } \tilde{h}(t) \approx h(t) \quad ; \quad \text{Hüllkurve von } \tilde{H}(\omega) \approx H(\omega) \quad (2.8)$$

mit einem Fehler bei der Approximation von  $\ll 10^{-4}$  eingehalten werden müssen, damit man das berechnete Ergebnis mit dem (meßbaren) Spektrum gleichsetzen kann.

Wird dies nicht beachtet, so entsteht ein mit der FFT berechnetes „Spektrum“, das sich wesentlich vom tatsächlichen (meßbaren) Spektrum unterscheidet. Der Unterschied wird „Leakage“ genannt.

Die Schwierigkeit, den Fehler klein zu halten, besteht darin, daß es keine sowohl Zeit- als auch Frequenz-begrenzte Funktionen gibt. Es kann immer nur bestenfalls ein Bereich endlich sein; der andere ist immer  $\infty$ .

## 2.1 Die Formeln für die DFS und die DFT

Will man die FFT anwenden, benötigt man eine Formel, die programmiert werden kann. Das Ergebnis der Gleichung (2.7) kann hierfür auch direkt aus der FT erhalten, indem man geeignet substituiert.

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad \longleftrightarrow \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.9)$$

Die Substitutionen lauten in Übereinstimmung mit Bild 2.1:

$$dt \rightarrow T; \quad t \rightarrow n \cdot T; \quad d\omega \rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0; \quad \omega \rightarrow k \cdot \omega_0; \quad \frac{T_0}{T} = N \quad (2.10)$$

Damit wird zunächst aus  $H(\omega)$ :

$$H(k\omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) e^{-jk\omega_0 nT} \cdot T = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) e^{-jkn \frac{2\pi}{N}} \quad (2.11) \quad ?$$

Entsprechend wird aus  $h(t)$ :

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(k\omega_0) e^{jk \frac{2\pi}{T_0} nT} \cdot \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(k\omega_0) e^{jkn \frac{2\pi}{N}} \quad (2.12) \quad ?$$

Die Gleichungen (2.11, 2.12) stellen ein Transformations-Paar dar. Das bedeutet, daß der Übergang vom Ober- zum Unter-Bereich und wieder zurück eindeutig ist. Man sieht dies durch Einsetzen von Gleichung (2.11) in (2.12):

$$\begin{aligned} h(nT) &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( T \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(mT) e^{-jkm \frac{2\pi}{N}} \right) e^{jkn \frac{2\pi}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(mT) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk(n-m) \frac{2\pi}{N}} \end{aligned} \quad (2.13) \quad ?$$

Die innere Summe in Gleichung (2.13) wird:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk(n-m)\frac{2\pi}{N}} = \begin{cases} N & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases} \quad (2.14)$$

Dies sieht man sofort graphisch ein:  $m = n \rightsquigarrow e^0 = 1$ ;  $m \neq n \rightsquigarrow$  „Phasensterne“; dieser ist in der Summe Null, Bild 2.2.

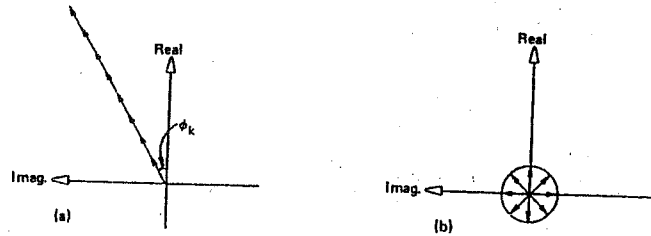


Bild 2.2: Beispiele für die Addition von Phasenvektoren

Für  $m = n$  bleibt auch von der äußeren Summe schließlich nur noch ein Term übrig:

$$h(nT) = \frac{1}{N} h(nT) \cdot N = h(nT) \quad (2.15)$$

Aus dieser Herleitung ergeben sich folgende Konsequenzen:

1. Der Zusammenhang

$$h(nT) = h[n] = h_n \quad \longleftrightarrow \quad H(k\omega_0) = H[k] = H_k$$

ist eine **eindeutige** Transformation. Dies ist unabhängig davon, was  $H[k]$  physikalisch bedeutet, bzw. ob die Transformierte  $H[k]$  physikalisch gemessen werden kann.<sup>1</sup>

2. Da die Transformierte oftmals auf eine geringere Datenrate führt, wird bei der Übertragung über bandbegrenzte Kanäle dann diese verwendet.<sup>2</sup>
3. Die Faktoren  $T$  aus Gleichung (2.11) &  $\frac{1}{T_0}$  aus (2.12) können zu

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{N}$$

zusammengefasst werden und **wahlweise** bei  $h[n]$  oder bei  $H[k]$  berücksichtigt werden.

**Vor der Anwendung einer FFT ist daher zu prüfen, welche Definition dabei verwendet wird!**

4. Da es sich bei  $h[n]$  &  $H[k]$  um **periodische** Funktionen handelt, genügt es, nur eine **einzelne Periode** zu betrachten, weil damit die komplette Information zur Verfügung steht. Dies entspricht dem Übergang DFS  $\rightarrow$  DFT (bzw. FFT).

<sup>1</sup>Ein weiteres Beispiel ist in diesem Zusammenhang auch die „Laplace-Transformation“. Bei der (LT) hat man im Bildbereich keine „natürlichen“ Frequenzen, sondern „komplexe“ Frequenzen.

<sup>2</sup>Anwendungen z.B. bei DAB, D-Mobilfunk, HDTV. Die hier dann benutzte Transformation ist die Cos-Transformation, weil diese für diesen Zweck günstiger ist.

Als Diskrete Fourier-Reihe (DFS) geschrieben erhält man damit, wenn der Beginn der Periode mit  $n = 0$  bzw.  $k = 0$  festgelegt wird:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn} \quad (2.16)$$

Die hier benutzte Definition verwendet den Faktor  $\frac{1}{N}$  bei der Rücktransformation.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird folgende Abkürzung für den komplexen Drehzeiger eingeführt:<sup>3</sup>

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} \quad (2.17)$$

Bild 2.3 zeigt ein Beispiel für die möglichen Positionen des Drehzeigers für  $N = 8$ .

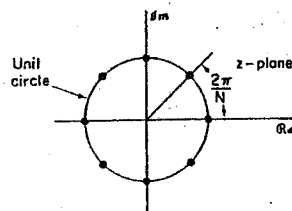


Bild 2.3: Die Positionen des Drehzeigers  $W_N$  für  $N = 8$

Mit der Vereinfachung Gleichung (2.17) wird dann die DFS:<sup>4</sup>

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn} \quad (2.18)$$

Als Diskrete Fourier-Transformation (DFT) geschrieben erhält man damit die Form, die nur die primitive Periode berücksichtigt:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad \longleftrightarrow \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad (2.19)$$

## 2.2 Beispiele für die DFS und die DFT

Weil die DFT nur einen Ausschnitt aus der DFS abbildet, ergeben sich in der Praxis einige damit verbundene Schwierigkeiten, wie anhand von Beispielen gezeigt werden soll.

### 2.2.1 Periodische Folge

Als 1. Beispiel wird eine periodische Folge betrachtet, die eine Periode  $N = 10$  hat, Bild 2.4.

Hierfür berechnet man:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^4 W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^4 e^{-j(2\pi/10)kn} = \frac{1 - W_{10}^{5k}}{1 - W_{10}^k} = e^{-j(4\pi k/10)} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)} \quad (2.20)$$

Die in Gleichung (2.20) berechnete DFS ist in Bild 2.5 nach Betrag und Phase dargestellt.

<sup>3</sup> $W_N$  ist ein Drehzeiger. Nicht zu verwechseln mit einer Fensterfunktion, die z.B. mit  $w(t)$  bezeichnet wird!

<sup>4</sup>Durch die Tilde  $\sim$  wird ausdrücklich auf die Periodizität in beiden Bereichen hingewiesen.

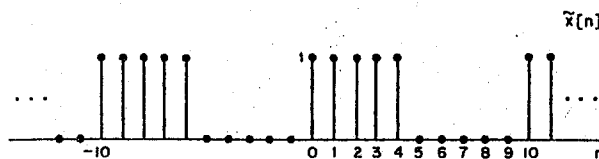
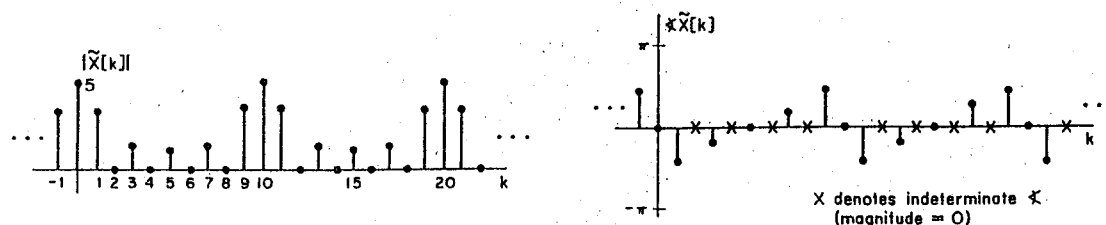
Bild 2.4: Periodische Folge mit Periode  $N = 10$ 

Bild 2.5: Betrag und Phase der DFS der Folge in Bild 2.4

### 2.2.2 Nicht periodische Folge

Als 2. Beispiel wird eine Folge betrachtet, die mit dem 1. Beispiel Bild 2.4 in der primitiven Periode übereinstimmt, sonst aber die Werte Null hat:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.21)$$

Es handelt sich hier also nicht um einen „Ausschnitt“ aus der Folge des 1. Beispiels, sondern um eine vollständige Folge, die für alle  $n$  definiert ist. Für diesen Fall ist die Fourier-Transformation für diskrete Signale (FTD) zuständig.<sup>5</sup> Man bekommt damit zunächst allgemein:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\Omega n} \quad (2.22)$$

Auf das 2. Beispiel bezogen wird daraus:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^4 e^{-j\Omega n} = e^{-j2\Omega} \frac{\sin(5\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \quad (2.23)$$

Das Ergebnis ist in Bild 2.6 dargestellt.

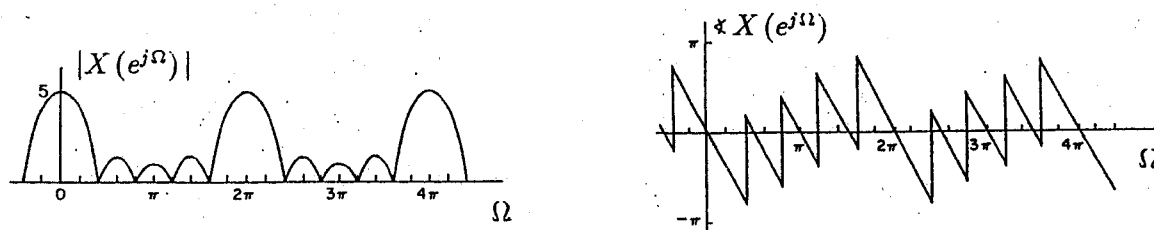


Bild 2.6: Betrag und Phase der Fourier-Transformierten der Folge Beispiel 2

<sup>5</sup>Eine Anwendung hierzu ist die Dimensionierung von FIR-Filtern. Hier ist die Impulsantwort  $h[n]$  endlich, woraus sich eine Übertragungsfunktion  $H(e^{j\Omega})$  mit der FTD berechnet.

### 2.2.3 Vergleich der Beispiele 1 & 2

Ein Vergleich von Gleichung (2.22) mit Gleichung (2.18) zeigt, daß gilt:

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=2\pi k/N} \quad (2.24)$$

Bild 2.7 zeigt dies anhand der Überlagerung der Ergebnisse der Beispiele 1 & 2.

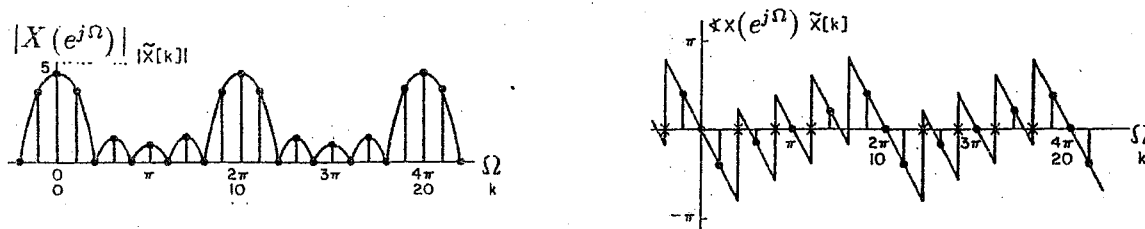


Bild 2.7: Die Überlagerung der Ergebnisse von Beispiel 1 & 2 zeigt, daß die Koeffizienten der DFS als Abtastwerte der FTD (für eine Periode) zu gewinnen sind.

## 2.3 Beispiele für die DFT mit unterschiedlicher Intervallbreite

Die DFT blendet mittels eines  $\Pi$ -Fensters eine Periode der DFS aus. Hat man eine nichtperiodische Folge zu transformieren, ist man bei der Wahl der Intervallbreite zunächst insoweit noch frei, als die Intervallbreite  $\geq$  der Länge der nichtperiodischen Folge sein muß.

### 2.3.1 DFT einer nicht periodischen Folge mit minimaler Intervallbreite

Als 3. Beispiel wird die DFT für die nicht periodische Folge des 2. Beispiels bestimmt. Die Intervallbreite wird dafür gleich der Länge  $N = 4$  festgelegt, was auf eine „5-Punkt“ DFT führt.

Durch Einsetzen in Gleichung (2.19) erhält man ein Ergebnis, das in Bild 2.8 dargestellt ist.

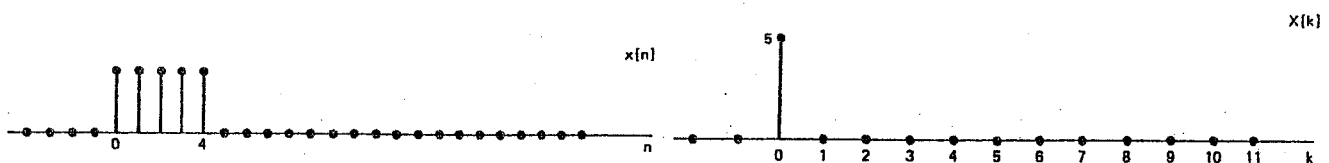


Bild 2.8: 5-Punkt DFT der Folge des 2. Beispiels

Offensichtlich entspricht das Ergebnis der DFT hier nicht den Erwartungen für die Spektralverteilung.

### 2.3.2 DFS einer nicht periodischen Folge mit minimaler Periode der DFS

Als 4. Beispiel wird das 2. Beispiel gewählt und die Periode mit  $N = 4$  angenommen. Damit sind wir identisch mit der DFT im 3. Beispiel, bezogen auf die „primitive Periode“, denn die Intervallbreite der DFT ist die Periode der DFS.

Im Zeitbereich erhält man somit einen  $\uparrow$ -Kamm (entspricht einem  $\delta$ -Kamm). Wie zu erwarten war, ist die Transformierte davon wieder ein  $\uparrow$ -Kamm, siehe Bild 2.9.



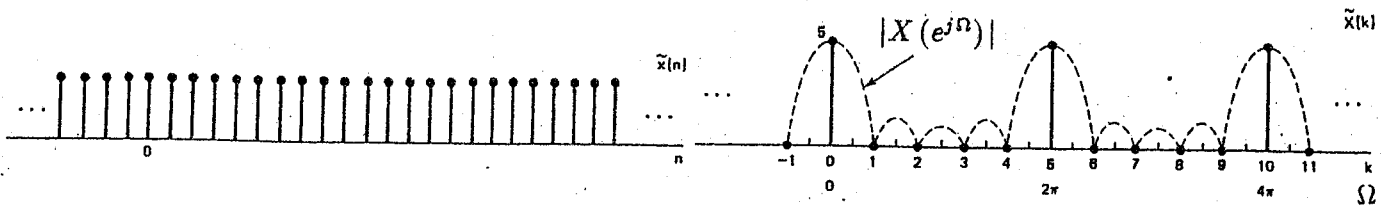


Bild 2.9: Periodische Fortsetzung des 2. Beispiels mit minimaler Periode und die zugehörige DFS. Zum Vergleich ist die FTD  $X(e^{j\Omega})$  gestrichelt eingetragen.

Aus Bild 2.9 sieht man:

- Die „primitive Periode“ der DFS und die DFT stimmen überein.
- Die FTD (gestrichelt) zeigt, weshalb das Ergebnis der DFT so enttäuscht: Die Abtastwerte der FTD, die die DFS bilden, fallen wegen der ungeschickt gewählten Länge der Periode genau auf Nullstellen der FTD.

### 2.3.3 DFT einer nicht periodischen Folge mit größerer Intervallbreite

Wählt man die Intervallbreite der DFT größer als die Länge der nichtperiodischen Funktion, müssen die restlichen Punkte mit Nullen „aufgefüllt“ werden. Diese Auffüllung mit Nullen wird „Zero-Padding“ genannt.<sup>6</sup>

Als 5. Beispiel wird nun eine DFT mit 10 Punkten ( $N = 9$ ) für das 2. Beispiel betrachtet, Bild 2.10.

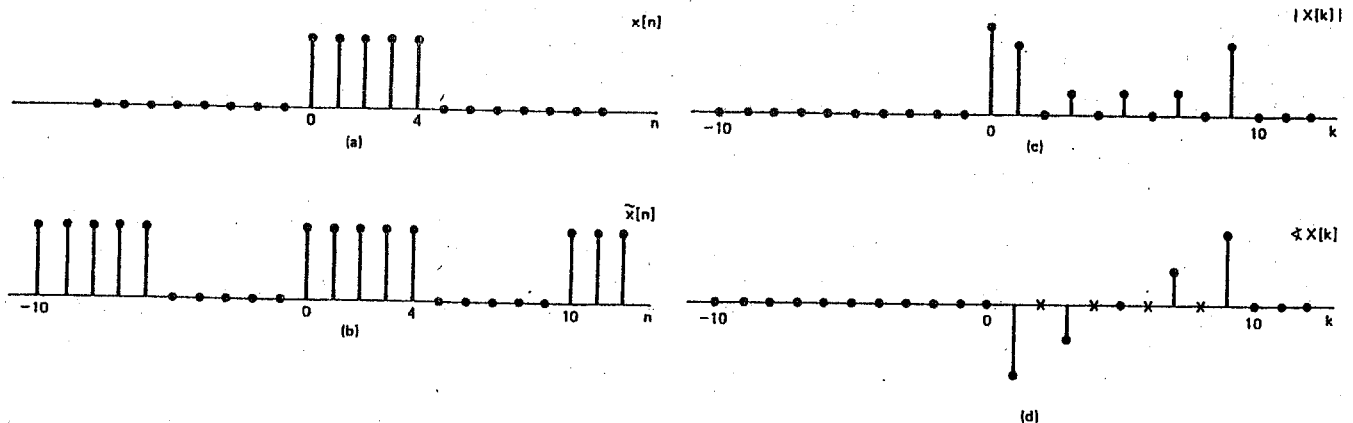


Bild 2.10: 10 Punkt DFT des 2. Beispiels

Wie man aus dem Vergleich mit Bild 2.5 erkennt, liefert die DFT jetzt genau die „primitive Periode“ der DFS.

Die Erkenntnis aus diesem Beispiel ist:

- Die (Fenster)-Länge der DFT (Anzahl der „Punkte“) muß für eine Spektrumsberechnung genügend groß gewählt werden.

<sup>6</sup>Die „Länge“ der nicht periodischen Folge ist genau genommen der Teil der Folge bei dem die Werte der  $\neq 0$  sind. Strenggenommen muß daher nichts aufgefüllt werden, da die nicht periodische Folge ja für alle  $n$  definiert ist und dann sowieso an diesen Punkten Null ist. Der Begriff „Zero-Padding“ dient daher nur zur Verdeutlichung.

### 3. Lineare & Zirkulare Faltung

Die Faltung wird bei der digitalen Filterung mit FIR-Filtern zur Berechnung der Ausgangsgröße eingesetzt. Dabei gilt, wenn  $x[n]$  die Eingangsfolge,  $y[n]$  die Ausgangsfolge und  $h[n]$  die Impulsantwortfolge bedeuten:

$$y[n] = x[n] * h[n] \tag{3.1}$$

Da  $h[n]$  eine nichtperiodische Folge darstellt, wird diese Faltung „linear“ bezeichnet.

Werden hingegen 2 Folgen, die ihrerseits periodisch sind, miteinander gefaltet, so ist das Ergebnis der Faltung ebenfalls periodisch. Eine derartige Faltung wird deshalb als „zirkular“ bezeichnet.

Aufgrund der Periodizität kann es bei den einzelnen Perioden zu Überlappungen aus den anderen Perioden kommen. In diesen Fällen erhält man (pro Periode) ein anderes Faltungsergebnis als bei einer linearen Faltung.

Nur dann, wenn gewährleistet ist, daß die zirkulare Faltung pro Periode mit der linearen Faltung übereinstimmt, kann zur Berechnung einer Faltung die DFT bzw. die FFT verwendet werden.

#### 3.1 Zirkulare Verschiebung

Da die DFT einen Ausschnitt aus der DFS darstellt, bewirkt eine Verschiebung bei einer DFT nur eine Verschiebung des „Fenster“-Ausschnitts (Intervalls), Bild 3.1.

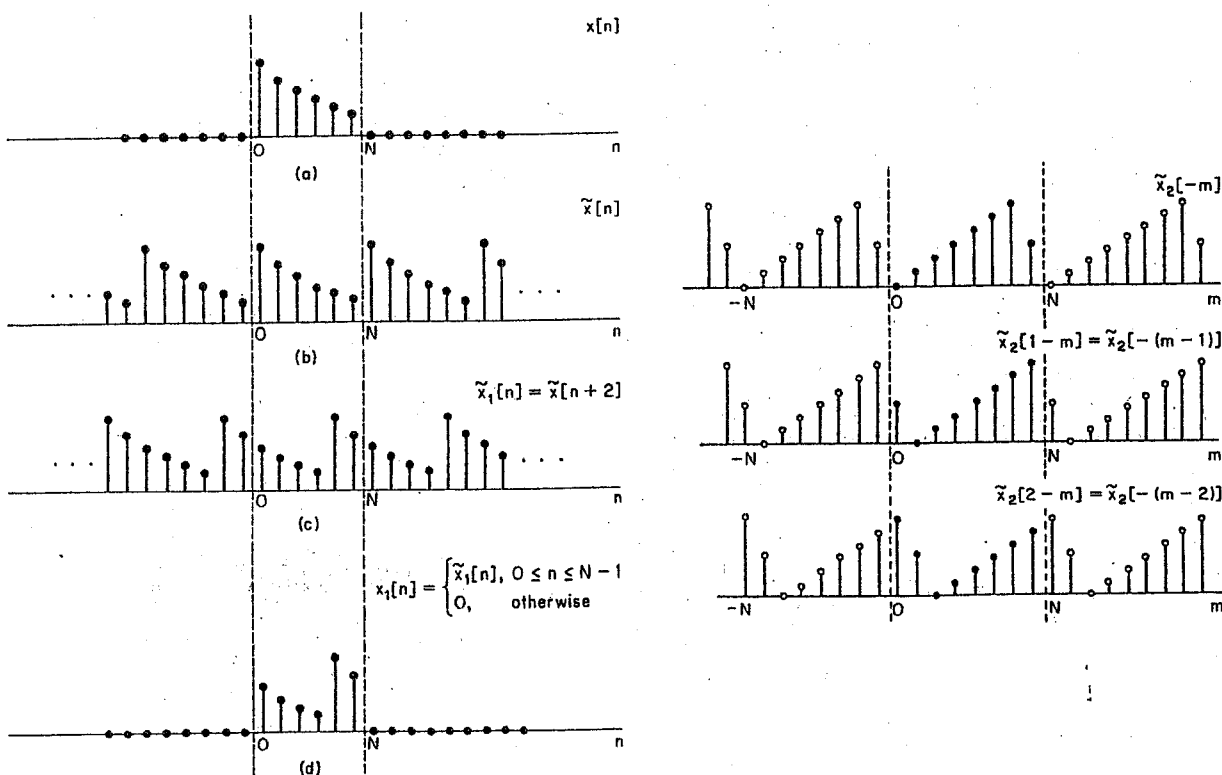


Bild 3.1: Zirkulare Verschiebung einer endlich langen Folge

Da zu einer Verschiebung in einem Bereich eine Phasendrehung im jeweils anderen Bereich gehört, folgt für die DFT:

- Zirkulare Verschiebung
- — • Phasendrehung

Die Periodizität der DFS kann man sich auch entstanden denken als Abrollen einer kreisförmigen Anordnung, Bild 3.2.

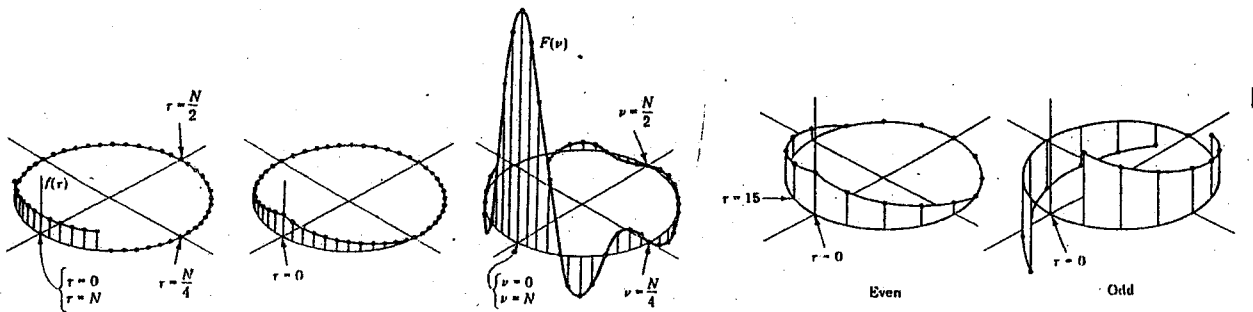


Bild 3.2: Beispiele von Zirkularen Darstellungen

Der Zeit-Verschiebungssatz ist für die Digitale Signalverarbeitung der wichtigste Satz überhaupt, weil hiermit die Auswirkung der Schiebe-Register z.B. bei der FIR-Filterung beschrieben werden können.<sup>1</sup> Ausgerechnet an dieser Stelle gibt es **Unterschiede zwischen Fourier-Transformation (FT) und Diskreter Fourier-Transformation (DFT)!**

Wie man jedoch aus den Beispielen des Bildes 3.2 erkennt, gibt es Fälle, bei denen man wenigstens eine gewisse kleine Verschiebung vornehmen kann, bevor sich die Zyklizität auswirkt:

- Enthält das Intervall der DFT Nullen ( $\uparrow = 0$ ), so kann entsprechend der Anzahl der Nullen geschoben werden bevor sich die Zyklizität auswirkt.

Wieviele Null- $\uparrow$  ein DFT-Intervall enthält, hat man dann geeignet festzulegen (Zero-Padding).

### 3.2 Zirkulare Faltung gleich langer Folgen

Werden zwei endliche Folgen  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$  mit den Längen  $L$  und  $P$  miteinander gefaltet (lineare Faltung), so hat das Faltungsprodukt  $x_3[n]$  die Länge  $L + P - 1$ .

$$\underbrace{x_1[n]}_{\text{Länge: } L} * \underbrace{x_2[n]}_{\text{Länge: } P} = \underbrace{x_3[n]}_{\text{Länge: } L+P-1} \quad (3.2)$$

Bild 3.3 zeigt ein Beispiel für die Faltung von 2 gleichen Rechteckfolgen  $x_1[n] = x_2[n]$  der Längen  $L = P$ . Das Ergebnis davon ist in Bild 3.3 (b) dargestellt und entspricht einer „linearen“ Faltung.

Da das in Bild 3.3 (a) dargestellte Intervall sich mit der Periode  $N = L = P$  wiederholt, müssen in diesem Fall die Faltungsprodukte aus Bild 3.3 (c & d) zum Ergebnis in Bild 3.3 (b) hinzuaddiert werden, wodurch sich als Endergebnis der zirkularen Faltung in Bild 3.3 (e) eine konstante  $\uparrow$ -Folge mit Amplitude  $L$  ergibt.

Die zirkulare Faltung erhält zur deutlichen Unterscheidung von der linearen Faltung ein neues Symbol:  $\circledast$ .

Daß das Faltungsprodukt dieser zirkularen Faltung sich vom Ergebnis einer linearen Faltung total unterscheidet liegt ganz offensichtlich wieder daran, daß die Intervall-Länge  $N$  zu klein gewählt würde. Bild 3.4 zeigt dieses Ergebnis noch einmal.

<sup>1</sup>Den Energie-Speichern (L & C) bei einer analogen Realisierung von Filtern — dem „Gedächtnis“ — entspricht bei der zeitdiskreten bzw. digitalen Realisierung die Verzögerungs-Kette bzw. das Schiebe-Register.

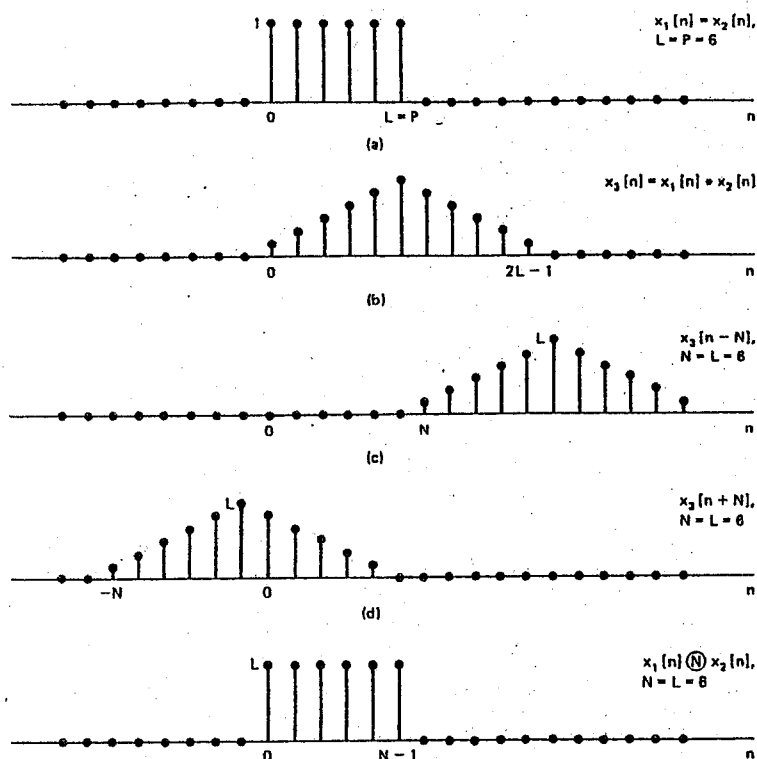


Bild 3.3: Veranschaulichung der Zirkularen Faltung aus der Überlagerung von linearen Faltungen

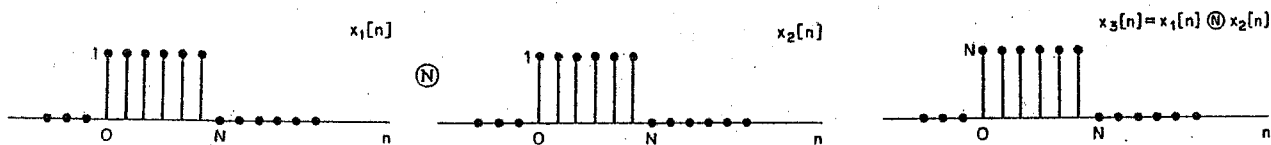


Bild 3.4: Beispiel für eine Zirkulare Faltung bei zu kleinem Intervall.

Wird hingegen das Intervall genügend groß gewählt, entspricht das Ergebnis der zirkularen Faltung genau dem Faltungsprodukt der linearen Faltung. Bild 3.5.

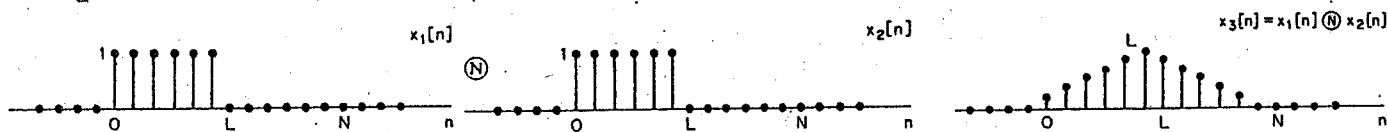


Bild 3.5: Die Zirkulare Faltung mit ausreichend großem Intervall hat das gleiche Ergebnis wie eine lineare Faltung

### 3.3 Zirkulare Faltung ungleich langer Folgen

Sind die Folgen ungleich lang, muß die Intervall-Länge mindestens so groß gewählt werden, wie es der längeren Folge entspricht. Die kürzere der Folgen ist mit Nullen aufzufüllen (Zero-Padding).

Für diesen Fall soll wieder ein Vergleich mit der linearen Faltung erfolgen. Hierfür wird das Beispiel

in Bild 3.6 gewählt. Die Folge  $x_1[n]$  ist  $L$  lang und die Folge  $x_2[n]$  hat die Länge  $P$ .

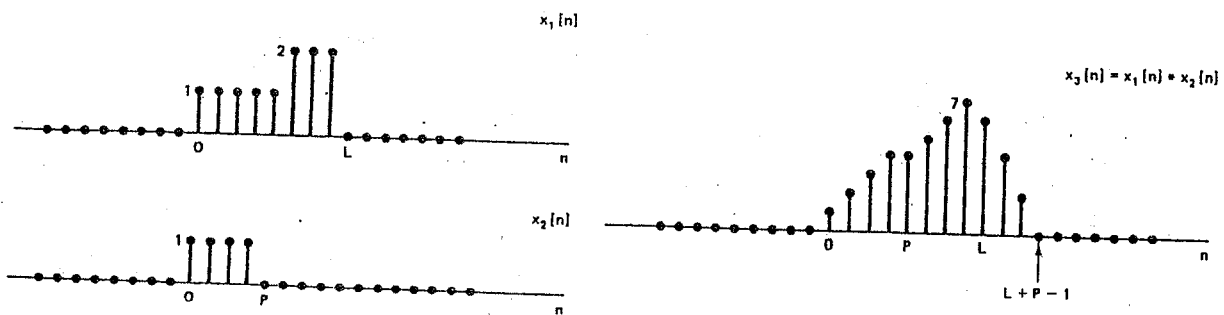


Bild 3.6: Beispiel für eine lineare Faltung mit unterschiedlich langen Folgen.

Nunmehr wird eine Zirkulare Faltung der beiden Folgen durchgeführt, wobei die Länge des Intervalls  $L$  gewählt wird. Das Ergebnis dieser zirkulären Faltung ist in Bild 3.7 dargestellt.

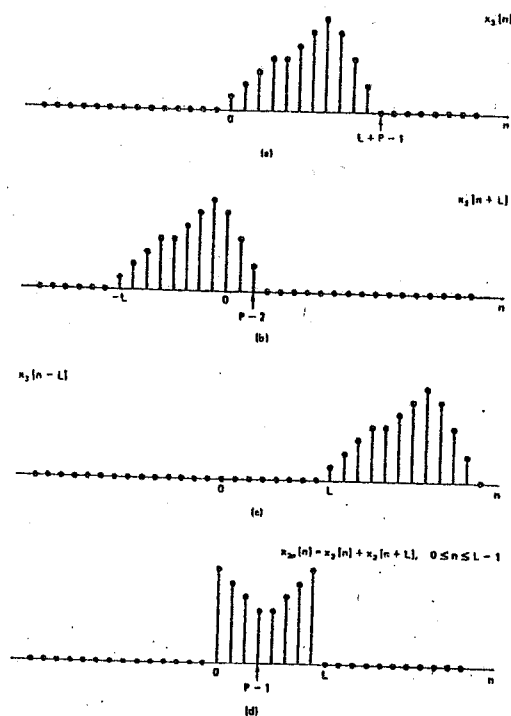


Bild 3.7: Zirkulare Faltung aus der Überlagerung linearer Faltungen

Bei genauer Betrachtung des Ergebnisses in Bild 3.7 erkennt man, daß jetzt immerhin die  $\uparrow$  von  $P$  bis  $L-1$  mit der linearen Faltung übereinstimmen.

Noch deutlicher sieht man dies, wenn man die sich überlagernden  $\uparrow$  unterschiedlich markiert, Bild 3.8.

Wählt man das Intervall nicht nur  $N = L$  sondern zu  $N = L + P - 1$ , so ergibt die zirkulare Faltung auch hier wieder das gleiche Ergebnis die lineare Faltung, ebenfalls Bild 3.8.

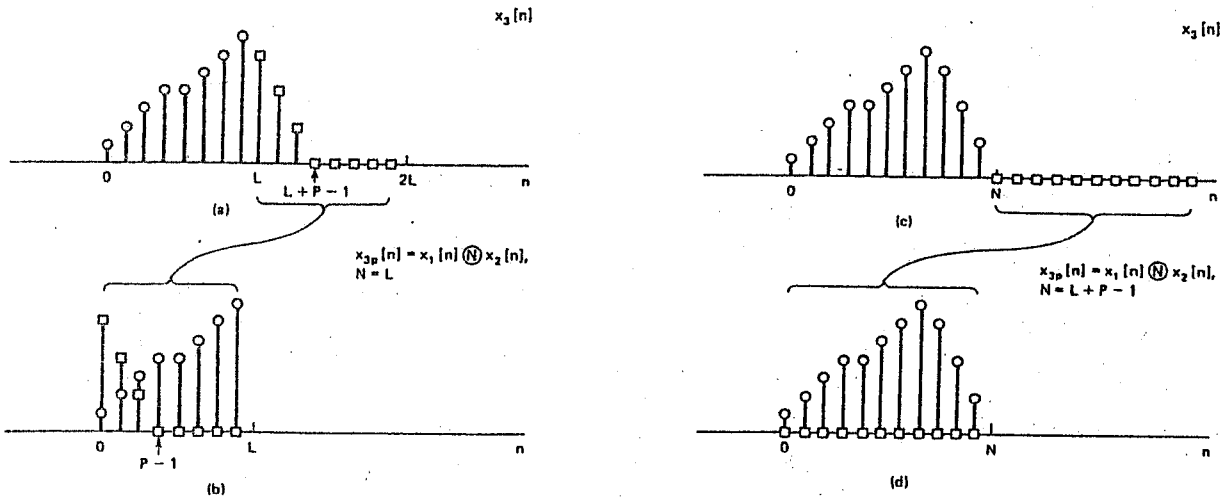


Bild 3.8: Teilweise Übereinstimmung von zirkularer und linearer Faltung bei ungleich langen Folgen.

### 3.4 Zirkuläre Faltung von sehr ungleich langen Folgen

Werden die Folgen sehr ungleich in ihrer Länge, müßte das Intervall für die DFT mindestens gleich der Länge der längeren Folge werden. Dies ist jedoch für praktische Anwendungen ungünstig, weil die längere Folge erst abgewartet werden muß, was für eine „online“ Verarbeitung nicht geht.

Bild 3.9 zeigt ein entsprechendes Beispiel.<sup>2</sup>

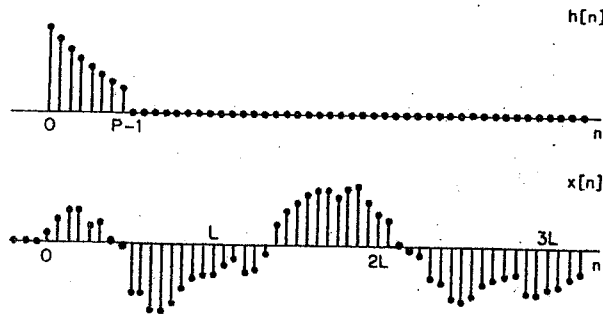


Bild 3.9: Eine  $\infty$  lange Folge  $x[n]$  und eine endlich lange Folge  $h[n]$  (Impulsantwort eines Filters)

#### 3.4.1 "Overlap-Add"-Methode

Damit die Länge des Intervalls für die DFT eine praktikable Größe bekommt, wird die Folge  $x[n]$  in Teilfolgen  $x_1[n], x_2[n], \dots$  usw. der Länge  $L$  zerlegt, denn nach dem Distributiv-Gesetz gilt:

$$x[n] * h[n] = \{x_1[n] + x_2[n] + \dots\} * h[n] = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n] + \dots \quad (3.3)$$

Diese Methode der Gewinnung eines Faltungsproduktes wird mit "Overlap-Add"-Methode bezeichnet.

Damit diese Zerlegung auch bei der zyklischen Faltung genau so funktioniert wie bei der linearen Faltung, muß die Länge des Intervalls zu

$$N = L + P - 1 \quad (3.4)$$

<sup>2</sup>Das Beispiel führt auf ein System mit nichtlinearem Phasengang. Für ein linearphasiges Filter muß die Impulsantwort  $h[n]$  eine gerade Symmetrie bezüglich der Laufzeit haben.

gewählt werden. Das bedeutet, daß die Teilstücke der Folge  $x[n]$  entsprechend durch  $P - 1$  Nullen bis zur jeweiligen Länge  $N = L + P - 1$  aufzufüllen sind (Zero-Padding). Dies zeigt Bild 3.10 & 3.11.

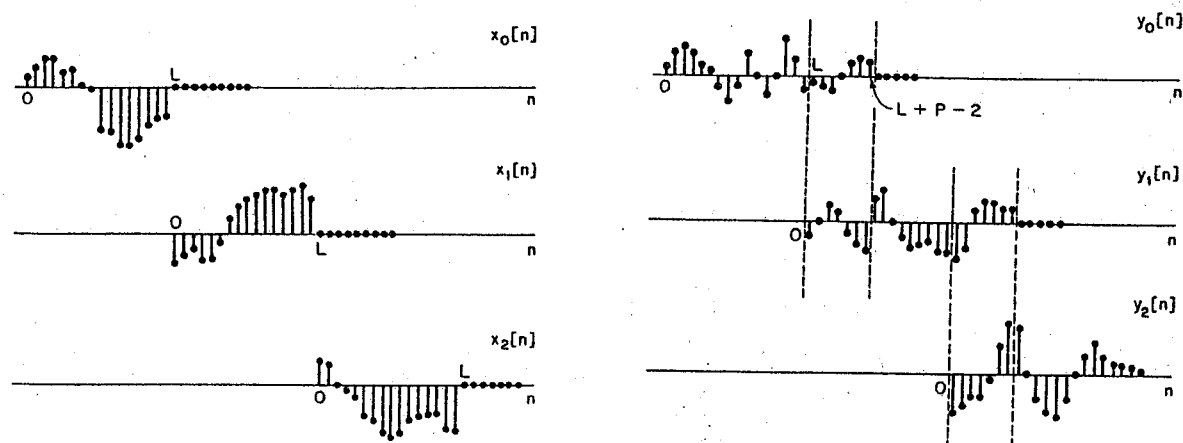


Bild 3.10: Zerlegung einer langen Folge in Teilstücke und Addition der Faltungsprodukte "Overlap-Add"-Methode. Länge der Folgen:  $L$  bzw.  $P$

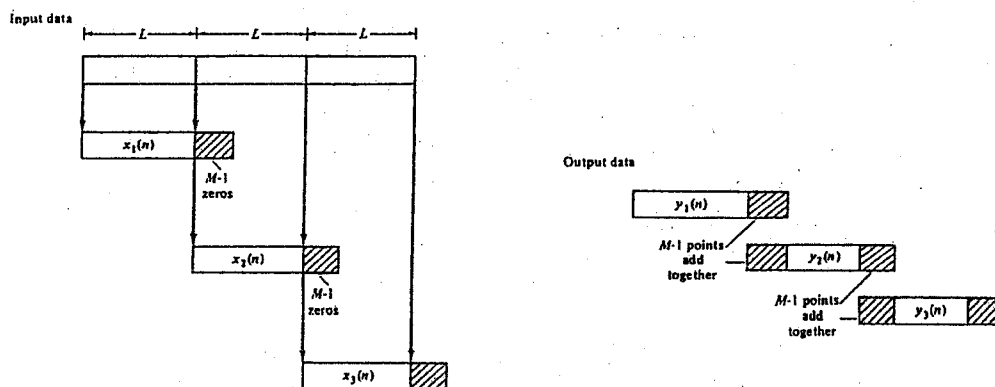


Bild 3.11: Schematische Darstellung der "Overlap-Add"-Methode. Länge der Folgen:  $L$  bzw.  $M$

### 3.4.2 "Overlap-Save"-Methode

Wie man schon aus den Bildern 3.7 & 3.8 ersehen konnte, gibt es bei der Zyklischen Faltung ungleich langer Folgen im Faltungs-Ergebnis Bereiche, die mit der linearen Faltung übereinstimmen. Je länger die längere Folge ist, desto länger ist auch der Bereich, der übereinstimmt. Ist die Länge der kürzeren Folge  $P$  bzw.  $M$ , so sind die ersten  $P - 1$  bzw.  $M - 1$  Werte jeweils „wegzuwerfen“. Die Überlappung der Teilstücke von  $x[n]$  ist entsprechend zu gestalten. Zusätzlich ist der ersten Folge  $x_1[n]$  eine Anzahl von  $P - 1$  bzw.  $M - 1$  Nullen voranzustellen (Zero-Padding), Bilder 3.12 & 3.13, Seite 16.

## 3.5 Schnelle Faltung

Hier soll z.B. eine beliebig lange Eingangs-Folge  $x[n]$  gefiltert werden, wie sie beispielsweise bei einem Audio-Signal entsteht. Das Filter habe die Impulsantwort  $h[n]$ .

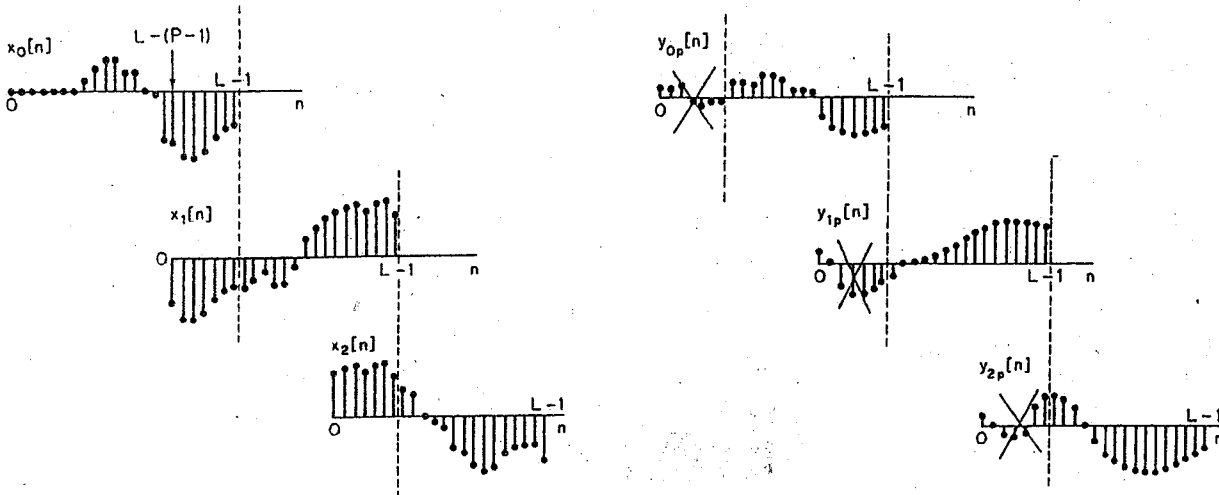


Bild 3.12: Beispiel für die "Overlap-Save"-Methode. Länge der Folgen:  $L$  bzw.  $P$

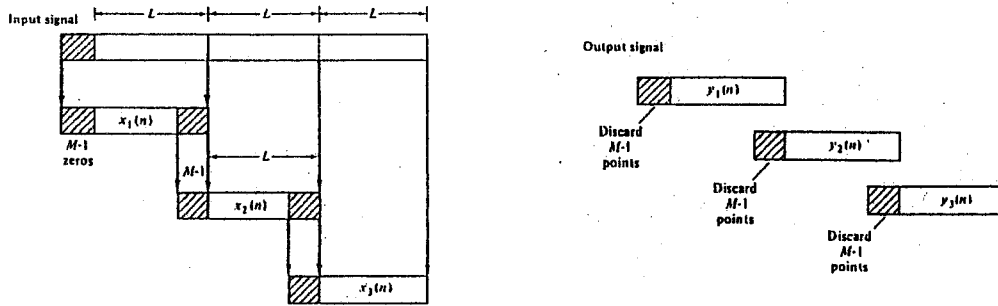


Bild 3.13: Schematische Darstellung der "Overlap-Save"-Methode. Länge der Folgen:  $L$  bzw.  $M$

Diese Faltung soll mittels einer DFT erfolgen, wobei  $X[k]$  und  $H[k]$  die Transformierten sind, die mit Hilfe einer FFT bestimmt werden. Die IDFT bzw. IFFT (inverse DFT bzw. FFT) ergibt dann die gesuchte Ausgangsfolge  $y[n]$ :

$$x[n] \otimes h[n] \quad \longleftrightarrow \quad X[k] \cdot H[k] = Y[k] \quad \longleftrightarrow \quad y[n] \quad (3.5)$$

Die Vorgehensweise zeigt Bild 3.14. Die so durchgeführte Faltung erhält den Namen „Schnelle Faltung“ (fast convolution).

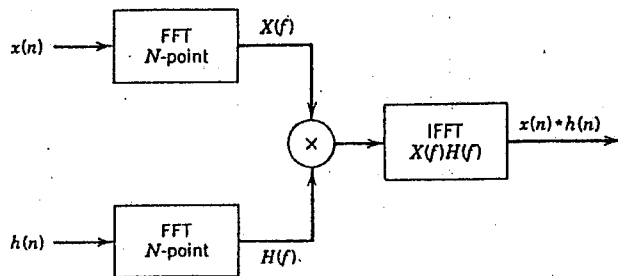


Bild 3.14: Schnelle Faltung mittels der FFT

In der Praxis wird für die Schnelle Faltung immer die "Overlap-Save"-Methode angewendet, weil es einfacher ist, einige Werte wegzuworfen als Teile addieren zu müssen wie bei der "Overlap-Add"-Methode. Die „Schnelle Faltung“ wird daher nach dem Schema Bild 3.15, Seite 17 durchgeführt.



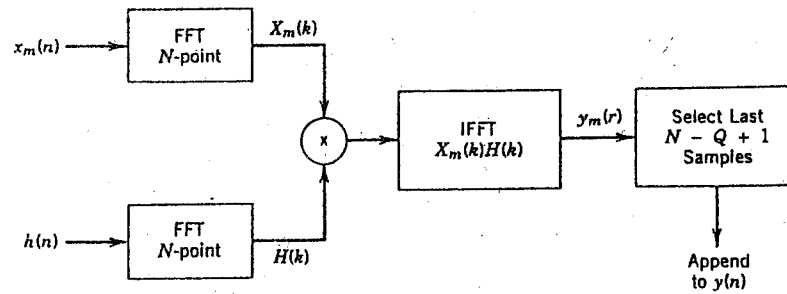


Bild 3.15: Schnelle Faltung mit der "Overlap-Save"-Methode

Zur Anwendung der Schnellen Faltung ist keinerlei „Fensterung“ der zu filternden Folge erforderlich.

Dies rührt daher, daß der Zusammenhang  $\text{FTD} \longleftrightarrow \text{IFTD bzw. FFT} \longleftrightarrow \text{IFFT}$  eineindeutig ist.

### 3.5.1 Anwendungen der schnellen Faltung

Die Schnelle Faltung hat mehrere praktische Anwendungen:

- Implementierung eines FIR-Filters
- Datenreduktion für die Übertragung über bandbegrenzte Kanäle

Bei der Implementierung einer FIR-Filterung muß man abwägen zwischen dem Aufwand für eine direkte Implementierung einer Faltung und dem Aufwand für eine  $\text{FFT} \longleftrightarrow \text{IFFT}$ . Dies ist natürlich vom Stand der Technik abhängig. Bild 3.16 gibt einen Hinweis für die Auswahl der Methode.

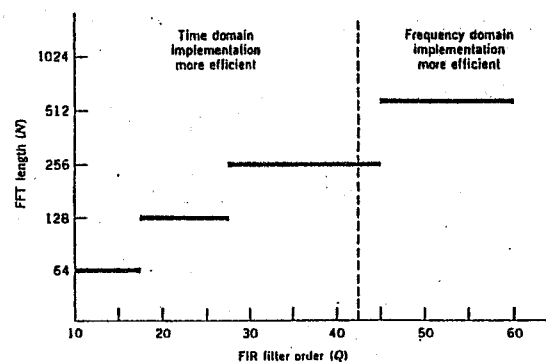


Bild 3.16: Optimale Länge der FFT für schnelle Faltung gegenüber der Länge für FIR-Filter mit direkter Faltung

Bei der Simulation von Systemen (digitaler System-Simulator) kann ebenfalls die schnelle Faltung angewendet werden.

Bei der Datenreduktion für die Übertragung über bandbegrenzte Kanäle wird im Sender die Transformation durchgeführt, während im Empfänger die Rück-Transformation erfolgt. Dies ist eine Art von Codierung, die infogedessen Transformations-Codierung heißt.

### 3.5.2 Die Diskrete Cos-Transformation

Die bei der Transformations-Codierung verwendete Transformation ist i.a. die Diskrete Cos-Transformation (DCT), weil diese eine günstigere Datenreduktion ergibt als die FFT.

Die DCT und die IDCT sind wie folgt definiert:<sup>3</sup>

$$C[k] = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} \quad \text{DCT} \quad (3.6)$$

$$x[n] = -\sqrt{\frac{1}{N}} C[0] + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} C[k] \cdot \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} \quad \text{IDCT} \quad (3.7)$$

Die hier benötigten Werte des Cos können in Tabellen abgelegt werden, wodurch sich die Rechengeschwindigkeit erhöht.

Bei reellen Folgen ist auch die DCT reell. Im Unterschied dazu erhält die DFT (FFT) einen Real- & Imaginär-Teil, was auf eine größere Datenrate führt.

## 4. Fenster-Funktionen für die DFT/FFT

Die DFT/FFT hat sowohl im Zeit- als auch im Frequenz-Bereich eine **Periodizität**. Da aber endlich lange Zeitfunktionen  $\infty$  breite Spektralverteilungen haben und — nach dem Vertauschungssatz — Spektren endlicher Breite  $\infty$  lange andauernde Zeitfunktionen haben, resultieren Unterschiede zwischen der Fourier-Transformation (FT) und der DFT/FFT.

Damit können folgende Probleme auftreten:

- Zeitbegrenzte Funktion  $\longleftrightarrow$  Unbegrenzte Bandbreite:  
 $\leadsto$  Alias im Frequenzbereich
  - Spezieller Fall:  
 Abtastwerte im Zeitbereich, deren Abtastwerte nicht mit den Zeitpunkten der DFT/FFT zusammenfallen
- Spektral begrenzte Funktion  $\longleftrightarrow$  Unbegrenzte Zeitdauer:  
 $\leadsto$  Alias im Zeitbereich
  - Spezieller Fall:  
 Periode der Zeitfunktion  $\neq$  Periode der DFT/FFT

Zur praktischen Lösung dieser Probleme werden Fenster-Funktionen verwendet. Man erreicht hierdurch, daß die zwar theoretisch  $\infty$  andauernden Zeitfunktionen bzw. Spektren ab einer gewissen Grenze unterhalb einer vorzugebenden Schwelle bleiben und damit als vernachlässigbar klein angesehen werden können.

Dafür ist es wichtig, daß die Transformierten der Fenster möglichst rasch klein werden und damit unter die vorgegebene Schwelle fallen. Für die Fenster-Form läßt sich daraus folgende Bedingung angeben.

Mit dem Zeit-Differentiations-Satz der Fourier-Transformation gilt:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j\omega)^n F(\omega) \quad (4.1)$$

<sup>3</sup>Der Faktor  $1/N$  ist bei dieser Definition der Cos-Transformation auf beide Bereiche aufgeteilt.

Man leitet also die Fensterfunktion (im Zeitbereich) so lange ab, bis  $\delta$ -Funktionen auftreten ( $n$ -fache Ableitung). Zunächst sei der Fall betrachtet, daß genau eine  $\delta$ -Funktion entsteht. Dann gilt:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \delta(t) \quad \circ \longrightarrow \quad (j\omega)^n F(\omega) = 1 \rightsquigarrow F(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^n} \quad (4.2)$$

Für den allgemeineren Fall, daß die  $n$ -fache Ableitung u.a.  $\delta$ -Impulse enthält, kann man dann immerhin noch eine Aussage über das asymptotische Verhalten der Transformaten machen:

$$F(\omega) \sim \frac{1}{\omega^n} \quad \text{für } \omega \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

In der logarithmischen Darstellung ergibt sich dadurch eine asymptotische Steigung von  $-n \cdot 20$  dB/Dekade.

Bild 4.1 zeigt Beispiele für Fensterfunktionen und deren Transformaten mit Angabe der asymptotischen Steigungen.

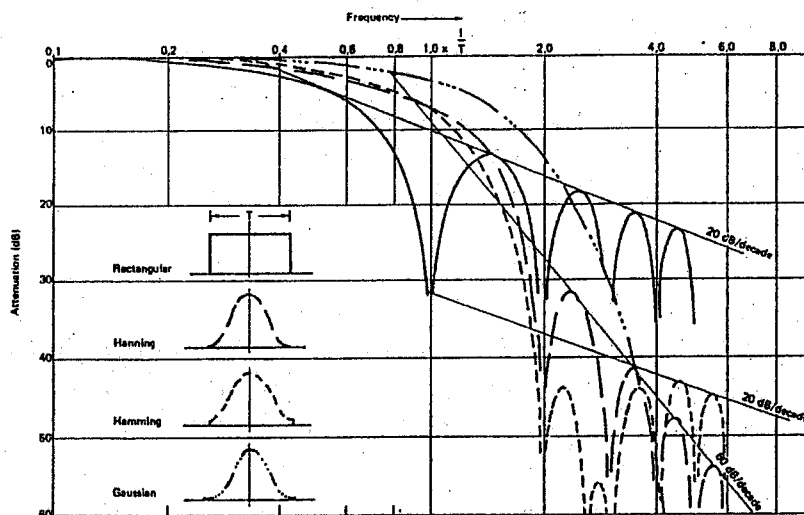


Bild 4.1: Beispiele von Fensterfunktionen und deren Transformaten

#### 4.1 Beispiele von Fensterfunktionen für die Spektralanalyse

Als Fensterfunktionen finden in FFT-Analysatoren i. a. folgende Formen eine Anwendung:<sup>1</sup>

- Rechteck:  $\square$
- Hanning:  $\cos^2$
- Kaiser-Bessel
- Flat-Top

Jede dieser Fensterfunktionen hat Vor- & Nachteile, wie im Kapitel „Bestimmung des Spektrums mit der DFT/FFT“ näher untersucht wird. Es gibt also kein „Universal-Fenster“, das für alle Anwendungen gleich gut paßt.

Bild 4.2 zeigt den Zeitverlauf dieser Fensterfunktionen.

<sup>1</sup>Bei den FFT-Analysatoren können verschiedene Fensterformen ausgewählt werden. Zusätzlich besteht meist die Möglichkeit, eine eigene Fensterform zu definieren.

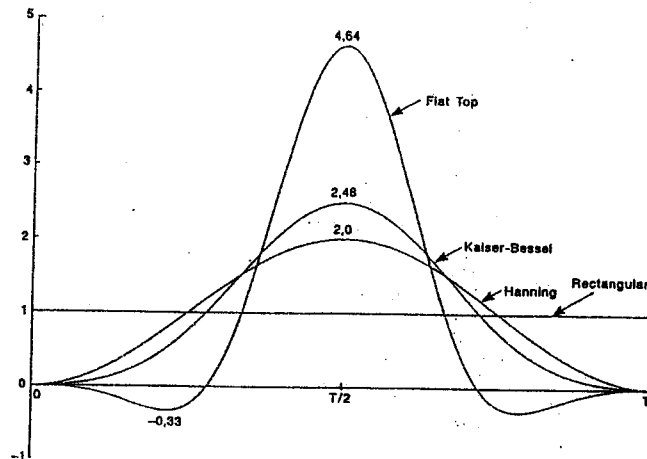


Bild 4.2: Einige gebräuchliche Fensterfunktionen für die Zeitdiskrete Spektralanalyse mittels DFT/FFT

Mit der Fensterfunktion wird der zu analysierende Zeitverlauf bewertet — d. h. multipliziert — wodurch er sich in seiner Form z. T. stark ändert. Damit die Signalenergie (für periodische Signale) trotz Fensterung erhalten bleibt, muß die maximale Höhe des Fensters reziprok zu seiner effektiven Breite werden. Andernfalls bekommt man im Spektrum je nach gewähltem Fenster eine andere Linienhöhe.

Die Eigenschaften dieser Fenster im Zeitbereich sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt.

Fenster	Maximum	Minimum	eff. Breite
Rechteck	1	1	$1 \cdot T$
Hanning	2	0	$0,375 \cdot T$
Kaiser-Bessel	2,48	0	$0,291 \cdot T$
Flat-Top	4,64	-0,33	$0,175 \cdot T$

Die Multiplikation mit der Fensterfunktion im Zeitbereich führt im Frequenzbereich auf die Faltung mit der Transformierten des Fensters.

Die Eigenschaften dieser Fenster im Frequenzbereich zeigt die anschließende Tabelle.<sup>2</sup> Die Bandbreite ist als  $\Delta f = 1/T$  definiert. Dies ist der Nullstellen-Abstand des  $\text{si}$  und damit der Linienabstand im Frequenzbereich.

Fenster	Rausch-Bandbreite	3 dB Breite	Welligkeit	max. Neben-Zipfel	Steigung	60 dB Breite	Form-Faktor
Rechteck	$\Delta f = 1/T$	$0,98\Delta f$	3,92 dB	-13,3 dB	-20 dB/Dek	$665\Delta f$	750
Hanning	$1,5\Delta f$	$1,44\Delta f$	1,42 dB	-31,5 dB	-60 dB/Dek	$13,3\Delta f$	9,2
Kaiser-Bessel	$1,80\Delta f$	$1,71\Delta f$	1,02 dB	-66,6 dB	-20 dB/Dek	$6,1\Delta f$	3,6
Flat-Top	$3,77\Delta f$	$3,72\Delta f$	0,01 dB	-93,6 dB	0 dB/Dek	$9,1\Delta f$	2,5

Man erkennt, daß für den Fall, daß die Nebenmaxima der Transformierten der Fensterfunktion klein werden, die Breite des Hauptmaximums dafür groß wird.

Eine wichtige technische Anwendung ist die Spektralanalyse periodischer Funktionen, die ein linienförmiges Spektrum besitzen. Aufgrund der Fensterung erhält man damit keine Linien, sondern

<sup>2</sup>Die Angaben beziehen sich auf die Fourier-Transformierte der Fenster, nicht auf die DFT/FFT der Fenster. D.h. im Frequenzbereich wird hier keine Periodizität angenommen.

an der Stelle der Linien jeweils die Form der Transformaten des gewählten Fensters.<sup>3</sup>

Da für eine Spektralanalyse speziell der Fall von Interesse ist, daß einzelne eng benachbarte & unterschiedlich große Spektral-Linien erkannt werden sollen, ist jedoch nicht nur die Breite des Hauptmaximums entscheidend, sondern auch die Größe der Nebenmaxima der Transformaten des Fensters, sowie die Steigung mit der sie kleiner werden.

Bei der Analyse eines Spektrums, das nicht aus Linien besteht, wirken sich die Nebenmaxima der Transformaten der Fensterfunktion nicht so stark aus. Dies sieht man gemäß dem Verfahren der „vereinfachten Faltung“ sofort ein. Führt nämlich die  $n$ -fache Ableitung des Spektrums auf  $\delta$ -Linien, so muß hierfür die Transformierte der Fensterfunktion  $n$ -fach integriert werden. Bei jeder Integration wird jedoch die „Welligkeit“, die auf die Nebenmaxima führt, geglättet. Somit ist es gerechtfertigt, die Auswahl der Fensterfunktion für linienförmiges Spektrum vorzunehmen, da hierbei die härtesten Bedingungen herrschen.

Da bei der DFT/FFT im Spektrum nur Abtastwerte berechnet werden, kommt es bezüglich der zunächst in der Form der Transformaten der Fensterfunktion entstehenden verbreiterten „Linien“ darauf an, an welchen Stellen diese Abtastung erfolgt.<sup>4</sup>

#### 4.1.1 Rechteck-Fenster

Die Verhältnisse bei Rechteckfensterung zeigt Bild 4.3

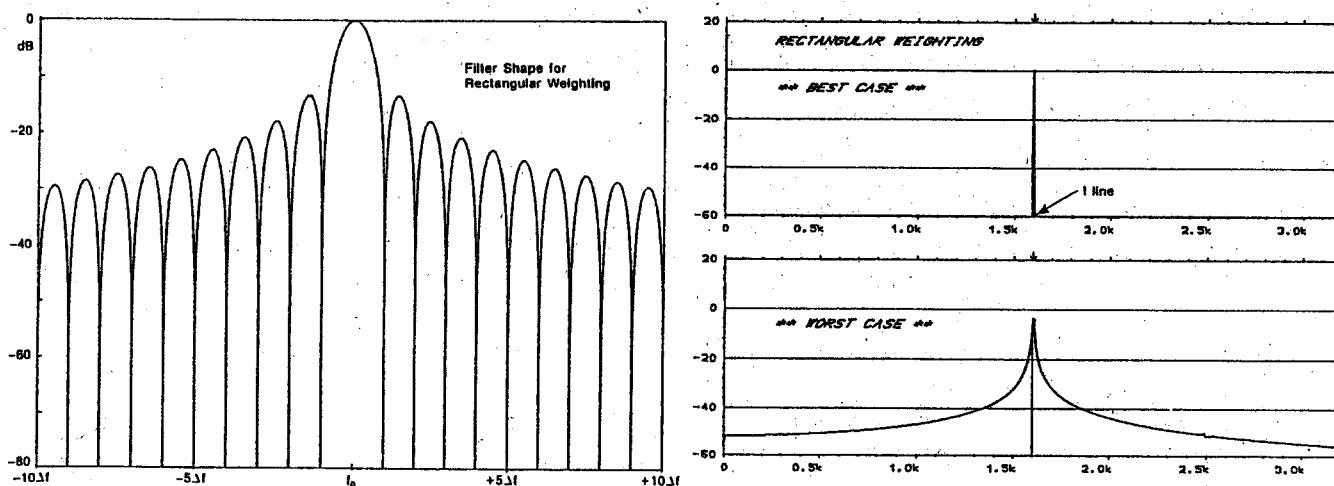


Bild 4.3: Transformierte des  $\Pi$ -Fensters und bester bzw. schlechtester Fall für die Darstellung einer Spektrallinie, je nach Ort der Abtastpunkte

Ist die Periode des Signals gleich der Periode der DFT/FFT, fallen die Abtastwerte im Spektrum mit den Nullstellen des  $\text{sinc}$  zusammen, so daß nur eine einzelne Linie dargestellt wird. Damit hat man die größtmögliche Übereinstimmung zwischen dem tatsächlichen Spektrum und der DFT/FFT.

Stimmen die Perioden jedoch nicht überein, so kann es im schlechtesten Fall zu einer Darstellung kommen, die fast keine Ähnlichkeit mit dem tatsächlichen Spektrum hat.<sup>5</sup>

Das  $\Pi$ -Fenster kann also nur verwendet werden, wenn die Gleichheit der Perioden-Dauern sichergestellt ist. Hierfür gibt es spezielle mit dem FFT-Analyzer gekoppelte Signalgeneratoren.

<sup>3</sup> Da im Frequenzbereich bei der DFT/FFT ebenfalls abgetastet wird, erhält man anstatt der Form der Transformaten des Fensters tatsächlich nur Frequenz-Linien entsprechender Höhe im Abstand  $\Delta f = 1/T$ .

<sup>4</sup> Dies hängt davon ab, wie das Verhältnis der Periode der Zeitfunktion zur Periode der DFT/FFT ist.

<sup>5</sup> Die Abweichungen werden mit "Leakage" bezeichnet.

### 4.1.2 Hanning-Fenster

Das Hanning-Fenster ist definiert als:

$$w(t) = 1 - \cos(2\pi t/T) = 2 \sin^2(\pi t/T); \quad 0 \leq t < T \quad (4.4)$$

Die Transformierte des Hanning-Fensters zeigt (betragsmäßig) Bild 4.4.

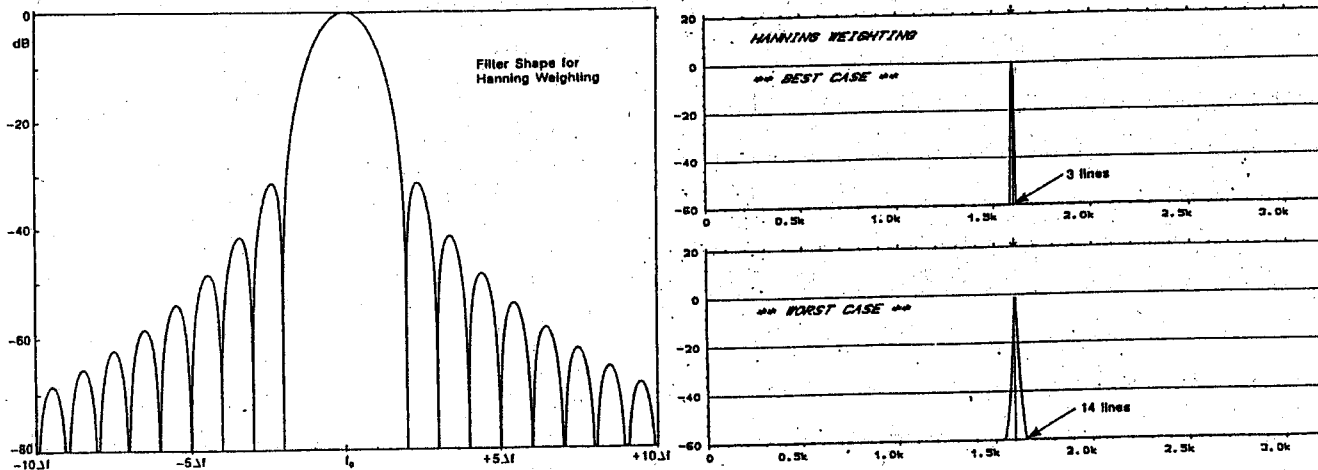


Bild 4.4: Transformierte des Hanning-Fensters & bester sowie schlechtester Fall bei Hanning-Fensterung

### 4.1.3 Kaiser-Bessel-Fenster

Das Kaiser-Bessel-Fenster kann mittels eines Parameters  $\beta$  für die Anwendung konfiguriert werden. Für den Vergleich mit den anderen Fensterformen wird hier folgende Festlegung getroffen:

$$w(t) = 1 - 1,24 \cos(2\pi t/T) + 0,244 \cos(4\pi t/T) - 0,00305 \cos(6\pi t/T); \quad 0 \leq t < T \quad (4.5)$$

Die Transformierte des Kaiser-Bessel-Fensters zeigt das Bild 4.5. Der „beste Fall“ bezieht sich nicht nur auf die Anzahl der dargestellten Linien pro Spektral-Linie, sondern auch darauf, ob die Amplitude der Spektral-Linie korrekt wiedergegeben wird. Letzteres hängt ja davon ab, an welcher Stelle die DFT/FFT die Abtastwerte entnimmt. Ist dies nicht exakt bei der Frequenz der Spektrallinie, wird die Größe nicht richtig wiedergegeben.

### 4.1.4 Flat-Top-Fenster

Die Bezeichnung „Flat-Top“ bezieht sich auf die Verhältnisse im Frequenzbereich. Die Transformierte dieses Fensters besitzt ein breites Maximum. Damit ist sichergestellt, daß auch für den Fall, daß der Abtastpunkt nicht mit der exakten Frequenz der Spektral-Linie zusammenfällt, die korrekte Amplitude erhalten wird.

Demzufolge wird man das Flat-Top-Fenster speziell zur Kalibrierung der Meßeinrichtung verwenden. Für eine Spektrums-Messung ist Flat-Top nicht so günstig, denn die Breite des Hauptmaximums verhindert die spektrale Trennung dicht benachbarter Linien.

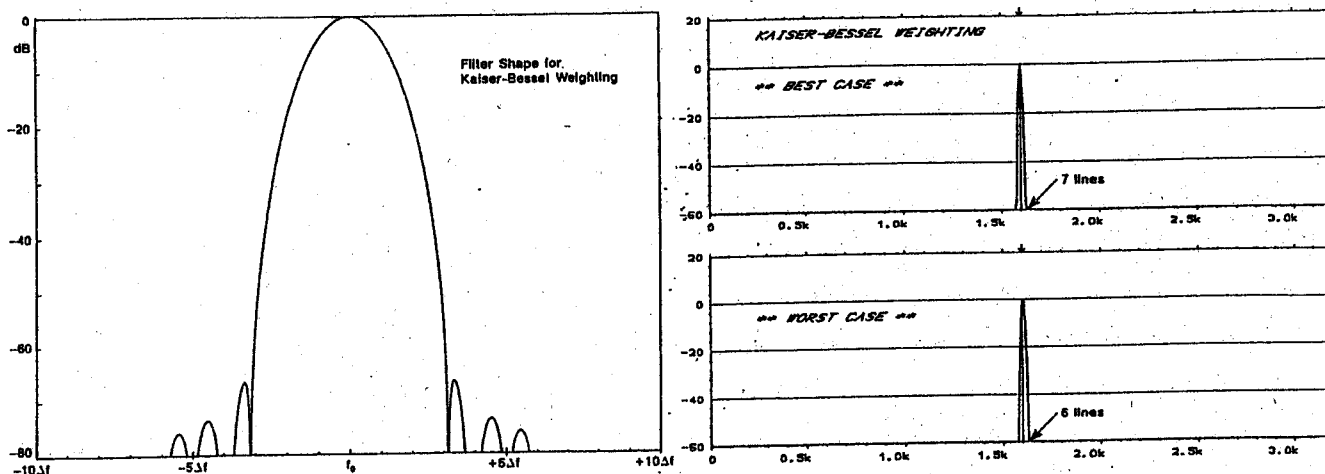


Bild 4.5: Transformierte des Kaiser-Bessel-Fensters & bester sowie schlechtester Fall für die Darstellung einer Spektrallinie

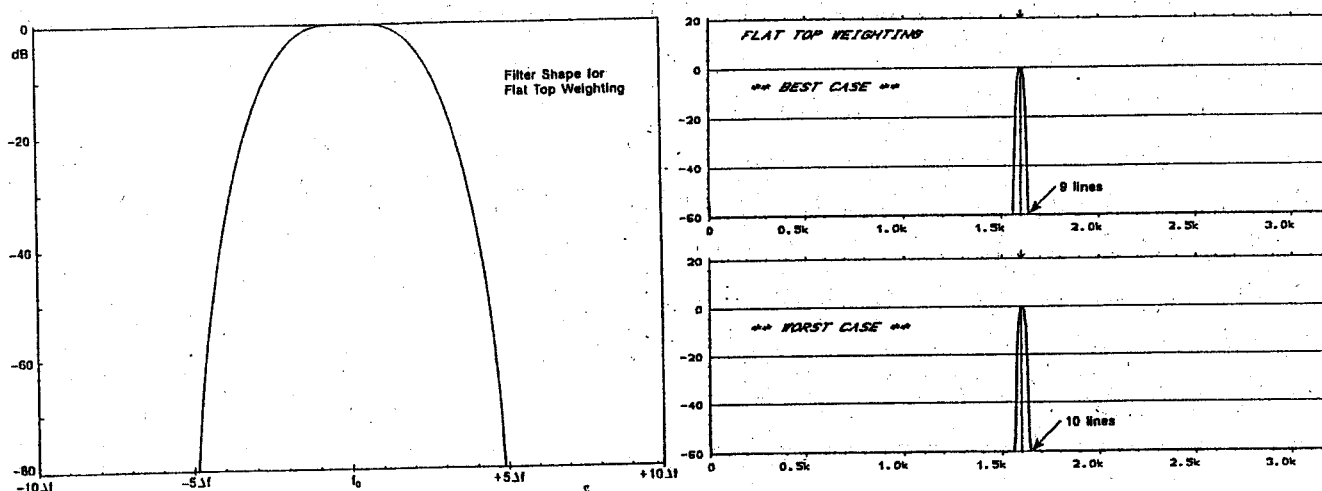


Bild 4.6: Transformierte des Flat-Top-Fensters & bester sowie schlechtester Fall für die Darstellung einer Spektrallinie

#### 4.1.5 Vergleich der Fenster bezüglich der spektralen Auflösung

Es seien zwei dicht benachbarte Spektrallinien zu erfassen, die sich in ihrer Größe jedoch stark unterscheiden.

Frequenzmäßig beträgt der Unterschied  $6\Delta f$  (d.h. 6 Linienabstände der DFT/FFT), während sich die Größe der Spektral-Linien um 40 dB unterscheidet.

Die für dieses Beispiel erreichte Auflösung als Funktion der gewählten Fensterfunktion zeigt Bild 4.7.

#### 4.2 Das Kaiser-Bessel-Fenster mit beliebigem Parameter

Eine besondere Rolle spielt das Kaiser-Bessel-Fenster, welches mittels eines Parameters  $\beta$  den Erfordernissen angepaßt werden kann. Damit ist es universell verwendbar.

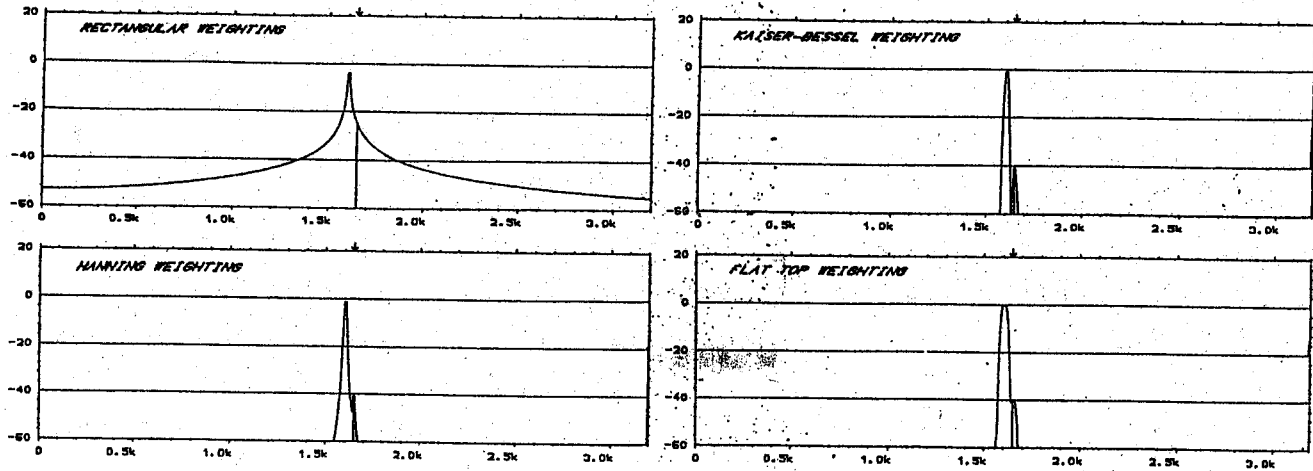


Bild 4.7: Spektrale Auflösung zweier dicht benachbarter Spektrallinien mit stark unterschiedlicher Größe

Das Kaiser-Bessel-Fenster ist wie folgt definiert:

$$w_K[n] = \begin{cases} \frac{I_0(\beta\sqrt{1-[(n-\alpha)/\alpha]^2})}{I_0(\beta)} & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.6)$$

Hierbei ist  $L$  die Länge des Fensters und  $I_0(\dots)$  die modifizierte Besselfunktion 0. Ordnung. Für  $\alpha$  gilt:

$$\alpha = (L - 1)/2 \quad (4.7)$$

Die modifizierte Besselfunktion berechnet sich wie folgt, wobei die Summe abgebrochen wird, wenn die Terme kleiner als eine vorgegebene Schwelle werden (z.B.  $10^{-8}$ ).

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2} \quad (4.8)$$

Bild 4.8 zeigt das Kaiser-Bessel-Fenster im Zeit- & Frequenz-Bereich. Für den Parameter-Wert  $\beta = 0$  erhält man ein  $\square$ -Fenster.

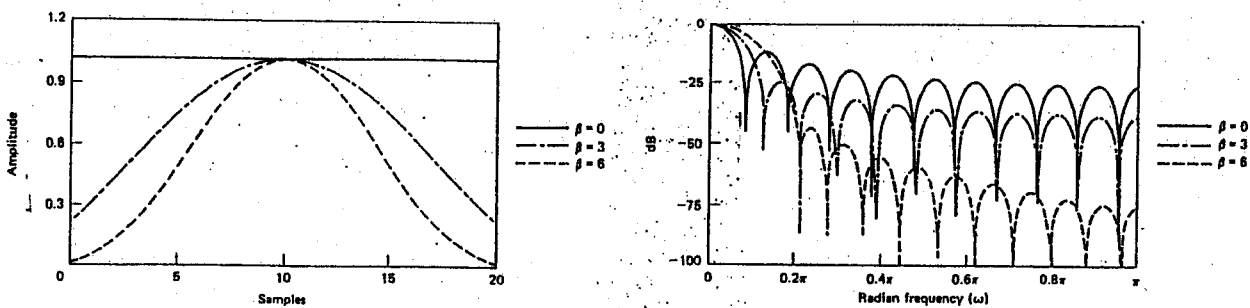


Bild 4.8: Kaiser-Bessel-Fenster im Zeit- & Frequenz-Bereich für feste Koeffizientenzahl



### 4.2.1 Dimensionierung des Kaiser-Bessel-Fensters

Die Vorschrift für die Dimensionierung stammt von Kaiser & Schafer.

Wie man aus Bild 4.9 erkennt, ist die Größe des ersten Nebenmaximums im Frequenzbereich beim Kaiser-Fenster unabhängig von der Länge des Fensters.

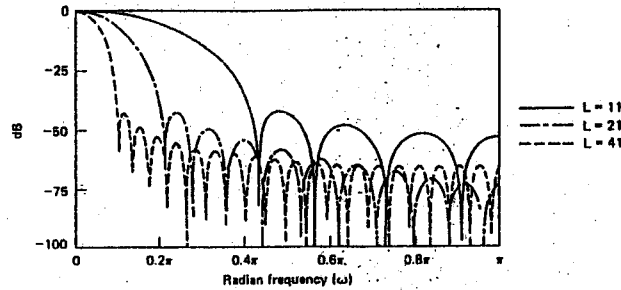


Bild 4.9: Die Größe des 1. Nebenmaximums im Frequenzbereich ist beim Kaiser-Fenster unabhängig von der Fenster-Länge.

Andererseits ist die Größe des Nebenmaximums vom Parameter  $\beta$  abhängig, wie Bild 4.8 zeigt. Verwendet man zur Abkürzung

$$\frac{A_{s,l}}{dB} = \frac{\text{Hauptmaximum}}{dB} - \frac{\text{größtes Nebenmaximum}}{dB}, \quad (4.9)$$

kann man folgende Berechnungsvorschrift für den Wert von  $\beta$  angeben.

$$\beta = \begin{cases} 0 & A_{s,l} < -13,26 \\ 0,76609(A_{s,l} - 13,26)^{0,4} + 0,09834(A_{s,l} - 13,26) & 13,26 < A_{s,l} < 60 \\ 0,12438(A_{s,l} + 6,3) & 60 < A_{s,l} < 120 \end{cases} \quad (4.10)$$

Mit Hilfe dieser Formel erreicht man eine gute Genauigkeit:

$A_{s,l}$  hat maximal 0,36% Abweichungen im Bereich  $13,26 < A_{s,l} < 120$ .

Als zweites wird die Länge  $L$  des Fensters bestimmt. Wichtigster Parameterwert ist hierfür die Breite des Hauptmaximums  $\Delta_{ml}$  in der Transformierten des Kaiser-Fensters.<sup>6</sup>  $\Delta_{ml}$  ist der Abstand der 1. Nullstellen links und rechts des Hauptmaximums (linearer Maßstab). In Bild 4.8 & 4.9 ist es zwei mal dem Wert zwischen Maximum und erstem Minimum. Damit erhält man

$$L \simeq \frac{24\pi(A_{s,l} + 12)}{155\Delta_{ml}} + 1 \quad (4.11)$$

### 4.3 Das Gauß-Fenster

Die Gauß-Funktion zeichnet sich dadurch aus, daß sie invariant bezüglich der Fourier-Transformation ist. Damit gilt:

$$f(t) = e^{-\pi(t/2t_m)^2} \quad \longleftrightarrow \quad F(\omega) = \frac{\pi}{\omega_m} e^{-\pi(\omega/2\omega_m)^2}; \quad t_m \cdot \omega_m = \frac{\pi}{2} \quad (4.12)$$

$2 \cdot t_m$  bzw.  $2 \cdot \omega_m$  sind die jeweiligen Breiten der flächengleichen Rechtecke.

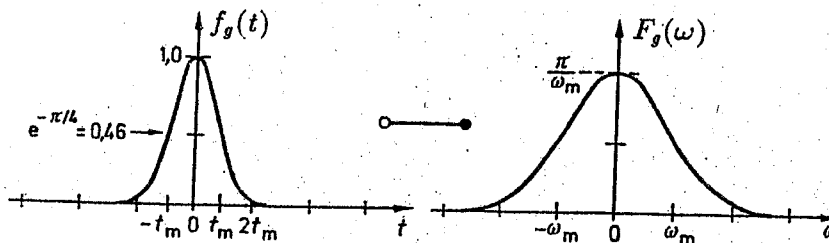


Bild 4.10: Die Gauß-Funktion und ihre Transformierte

Bild 4.10 zeigt die Gauß-Funktion und ihre Transformierte.

Theoretisch ist die Gauß-Funktion  $\infty$  breit. Praktisch ist sie jedoch rasch beliebig klein. Dieses Verhalten kommt der DFT/FFT entgegen. Man muß hierfür die Gauß-Funktion so festlegen, daß sie in beiden Bereichen innerhalb der jeweiligen Periode genügend abgeklungen ist. Dadurch entsteht jeweils ein beliebig kleiner Fehler, der dann tolerierbar ist.

Für das Gauß-Fenster wird häufig auch eine andere Normierung verwendet.

$$w_G(t) = e^{-\pi(t/2t_m)^2} = e^{-(t/\sqrt{2}\sigma_t)^2} \quad 2t_m = \sqrt{2} \sigma_t \cdot \sqrt{\pi} \Rightarrow t_m = \sigma_t \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$W_G(\omega) = \frac{\pi}{\omega_m} e^{-\pi(\omega/2\omega_m)^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_\omega} e^{-(\omega/\sqrt{2}\sigma_\omega)^2} \quad 2\omega_m = \sqrt{2} \sigma_\omega \cdot \sqrt{\pi} \Rightarrow \omega_m = \sigma_\omega \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (4.13)$$

Als Parameter wird hier in beiden Bereichen die „Streuung“  $\sigma$  verwendet. Es bestehen folgende Zusammenhänge:

$$t_m = \sqrt{\pi/2} \cdot \sigma_t; \quad \omega_m = \sqrt{\pi/2} \cdot \sigma_\omega; \quad \sigma_t \cdot \sigma_\omega = 1 \quad t_m \cdot \omega_m = \sigma_t \cdot \sigma_\omega \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = 1 \quad (4.14)$$

Bild 4.11 zeigt Gauß-Fenster in dieser Normierung.

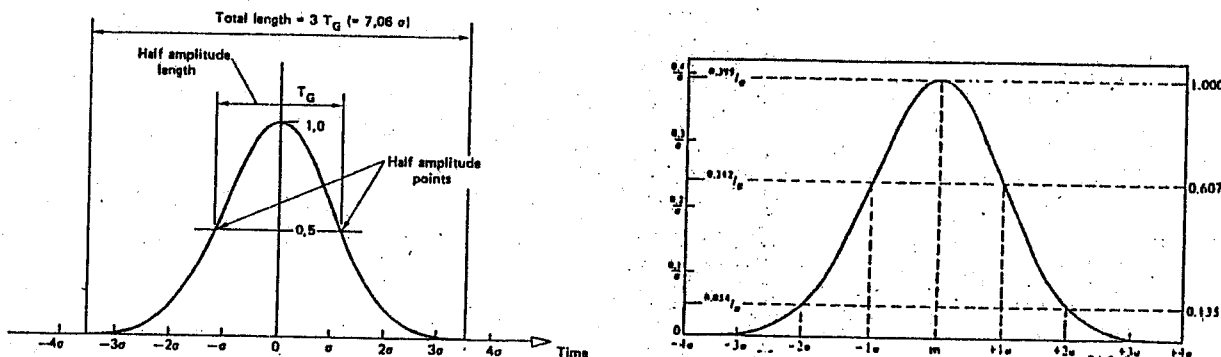


Bild 4.11: Gauß-Fenster mit der Streuung  $\sigma$  als Zeitmarken

Bei der Verwendung eines Gauß-Fensters muß damit der Wert für  $\sigma_t$  so gewählt werden, daß  $7,06\sigma_t$  gleich der Fensterlänge wird. Der Fehler an der Abbruchstelle ist dabei  $\approx 2 \cdot 10^{-3}$ .

<sup>6</sup>Die Breite des Hauptmaximums bestimmt den Abstand und den Pegelunterschied für zwei Spektrallinien, die noch getrennt werden können.

### 4.3.1 Modifiziertes Gauß-Fenster für die „Schnelle Faltung“

Bei der Berechnung der „Schnellen Faltung“ wird vorausgesetzt, daß die Impulsantwort  $h(t)$  — und damit die Impulsantwort-Folge  $h[n]$  — endlich ist. Unter dieser Voraussetzung war dann zur Durchführung der „Schnellen Faltung“ keinerlei Fensterung nötig.

Eine endliche Impulsantwort haben aber nur solche (Filter-) Systeme, die im Frequenzbereich  $\infty$  breit sind. Dagegen sind praktisch interessante Filter im Frequenzbereich endlich breit und hätten damit eine  $\infty$  lange Impulsantwort, wodurch die „Schnelle Faltung“ nicht mehr anwendbar wäre.

Abhilfe aus diesem Dilemma schafft ein modifiziertes Gauß-Fenster mit den Eigenschaften:

- Begrenzen der Impulsantwort  $h(t)$  auf eine endliche Länge mit vernachlässigbarem Fehler.
- Vernachlässigbarer Fehler im Frequenzbereich trotz Fensterung der Übertragungsfunktion  $H(\omega)$ .

Vernachlässigbare Fehler entstehen in beiden Bereichen aufgrund der raschen Abnahme der Gauß-Funktionen.

Zur Herleitung dieses Fensters geht man von der Gauß-Korrespondenz gemäß Gleichung (4.12) aus, siehe auch Bild 4.10 auf Seite 26:

$$f_g(t) = e^{-\pi(t/2t_m)^2} \quad \longleftrightarrow \quad F_g(\omega) = \frac{\pi}{\omega_m} e^{-\pi(\omega/2\omega_m)^2}; \quad 2t_m \cdot 2\omega_m = 2\pi \quad (4.15)$$

Aufgrund des Satzes über die Zentralordinate folgt daraus:

$$f_g(0) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} F_g(\omega) d\omega = 2\pi \quad (4.16)$$

Die Fläche unter der Transformierten  $F_g(\omega)$  ist also  $2\pi$ .

Die Fensterfunktion  $W_s(\omega)$  entsteht nun über eine Faltung aus einer Gauß-Funktion und einem Rechteck.

$$\begin{aligned} W_s(\omega) &= F_g(\omega) \quad \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} \Pi_{\omega_c}(\omega) \\ &= \frac{\pi}{\omega_m} e^{-\pi(\omega/2\omega_m)^2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\} \Pi_{\omega_c}(\omega) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Diese Faltung zeigt Bild 4.12. Hierbei wird das Verfahren der „Vereinfachten Faltung“ (VF) angewendet. Gestrichelt gezeichnet ist dabei das flächengleiche Rechteck und die daraus resultierende Trapezform für die Näherung des Fensters  $W_s(\omega)$ .

Mit dem Fenster  $W_s(\omega)$  wird die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  des Filters multipliziert, wobei gefordert ist, daß der dadurch entstehende Fehler  $\leq 10^{-4}$  wird. Das bedeutet, daß das Fenster  $W_s(\omega)$  in dem Bereich, den die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  des Filters einnimmt — bis auf den zugelassenen Fehler — gleich 1 sein muß.

Also muß bei gegebener Frequenz  $\omega_c$  die Größe von  $\omega_m$  so festgelegt werden ~~muß~~, daß ein möglichst großer Bereich gleich 1 wird.

Aufgrund der Konstruktion der Fensterfunktion  $W_s(\omega)$  über die VF erkennt man, daß man den Fehler (Abweichung vom Wert 1) aus einer Flächenintegration über die Gauß-Glocke erhält. Das

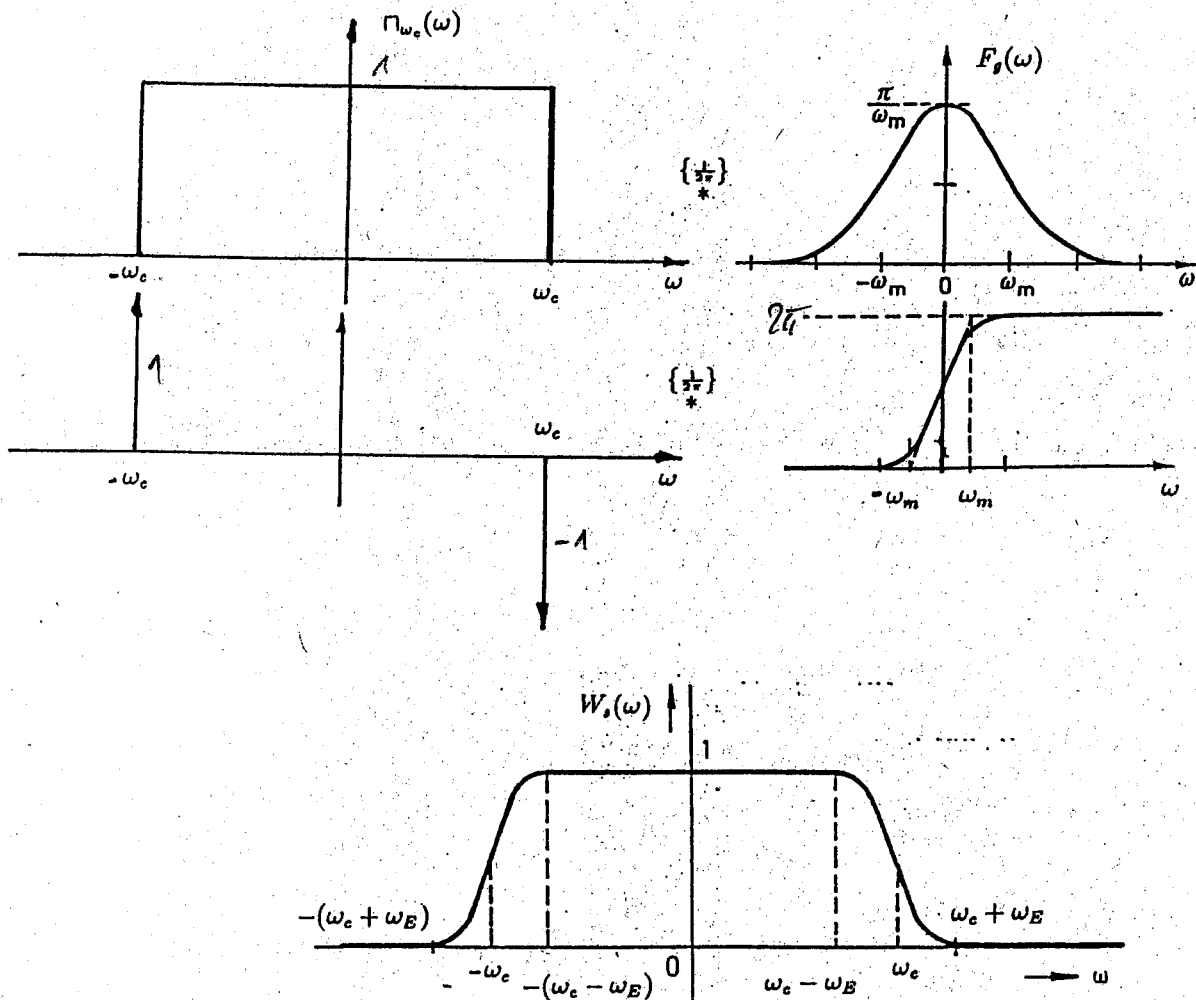


Bild 4.12: Gewinnung der Fensterfunktion  $W_s(\omega)$  über eine Faltung einer Gauß-Glocke und eines Rechtecks („Vereinfachte Faltung“)

Ergebnis dieser Integration ist als  $Q$ -Funktion bekannt.<sup>7</sup> Die Definition und den Verlauf der  $Q$ -Funktion zeigt Bild 4.13.

Die  $Q$ -Funktion und ihre Approximationen für große Argumente lauten:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2/2} dy \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x^2/2} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} (1 - 1/x^2) e^{-x^2/2} \quad (4.18)$$

Angewendet auf das vorliegende Problem erhält man für den Fehler  $E(\omega_E)$ :

$$E(\omega_E) = \frac{\pi}{\omega_m} \int_{\omega_E}^{\infty} e^{-\pi(\omega/2\omega_m)^2} d\omega \quad (4.19)$$

Um die  $Q$ -Funktion hierfür anwenden zu können, muß substituiert werden:

$$\pi(\omega/2\omega_m)^2 = x^2/2 \quad \rightsquigarrow \quad d\omega = \sqrt{\pi/2}\omega_m dx; \quad \omega_E = x \cdot \omega_m \sqrt{2/\pi} \quad (4.20)$$

Damit wird:

$$E(\omega_E) = 2\pi \cdot Q\left(\frac{\omega_E}{\omega_m} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \quad (4.21)$$

<sup>7</sup> Entsprechende Integrationen werden auch zur Bestimmung der Bitfehler-Wahrscheinlichkeiten bei digitalen Übertragungen angewendet. Hier tritt ebenfalls die  $Q$ -Funktion auf.

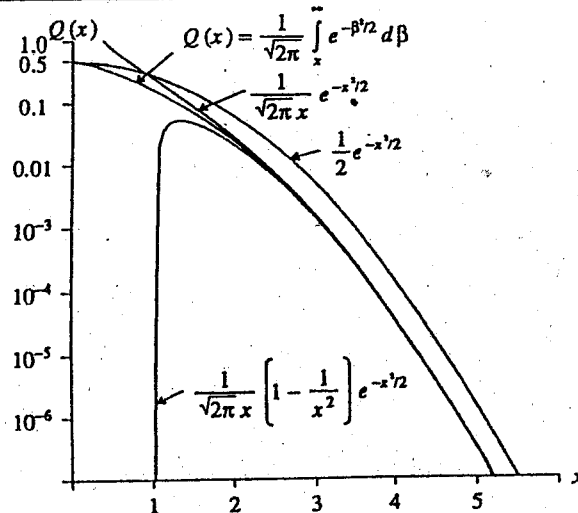


Bild 4.13: Definition und Verlauf der Q-Funktion

Für einen gewünschten Fehler von  $10^{-4}$  ist  $Q(3.7)$  zu nehmen, wie man aus Bild 4.13 erkennt. Damit folgt:

$$\omega_E = 3,7 \sqrt{2/\pi} \cdot \omega_m = 2,952 \omega_m \approx 3 \omega_m \quad (4.22)$$

Nun kann man festlegen, wie groß der Übergangsbereich in  $W_s(\omega)$  sein soll. Es sei

$$\omega_E = \omega_c/10 \rightsquigarrow \omega_m = \omega_c/30 \quad (4.23)$$

Die Rücktransformierte  $w_s(t)$  des Fensters  $W_s(\omega)$  kann als (praktisch) zeitbegrenzte Interpolationsfunktion angesehen werden.<sup>8</sup>

Mit dem Faltungs-Satz erhält man:

$$w_s(t) = e^{-\pi(t/2t_m)^2} \cdot \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} \cdot \frac{\omega_c}{\pi} = e^{-\pi(t \cdot \omega_c / 2 \cdot 30\pi)^2} \cdot \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} \quad (4.24)$$

Mit den in Gleichung (4.23) gefundenen Werten wird dann

$$t_m = \frac{\pi}{2\omega_m} = \frac{30\pi}{2\omega_c} \quad (4.25)$$

Mit den Nullstellen-Abständen  $t_N$  des  $\frac{\sin(x)}{x}$  gilt  $t_N = \frac{\pi}{\omega_c}$

$$t_m = 15 t_N \rightsquigarrow t_m = 3 t_m = 45 t_N \quad (4.26)$$

Die zeitbegrenzte Interpolationsfunktion  $w_s(t)$  ist damit  $\pm 45$  Nullstellenabstände des  $\sin(x)/x$  breit zu machen, wenn auch hier ein Fehler  $\leq 10^{-4}$  angenommen werden soll.

Bild 4.14 zeigt  $|w_s(t)|$  im Vergleich zu  $|\sin(x)/x|$ , beide in logarithmischer Darstellung.

## 5. Bestimmung des Spektrums mit der DFT/FFT

Bei der „normalen“ Fourier-Transformation (FT) ist der „Bildbereich“ der Frequenzbereich, wie er auch meßtechnisch mit einem (analogen) Spektrum-Analyzer gemessen werden kann. Somit besteht hier Übereinstimmung zwischen gerechnetem & gemessenem Spektrum.<sup>1</sup>

<sup>8</sup>Nach dem Abtast-Theorem benötigt man zur Filterung im Grenzfall einen  $\square$ -förmigen Tiefpaß und hat dann einen  $\frac{\sin(x)}{x}$ , der eine nicht zeitbegrenzte Interpolationsfunktion darstellt.

<sup>1</sup>Die Auswirkung der endlich breiten Analyse-Filter des Analyzers auf die Form der gemessenen Spektralverteilung läßt sich einfach erfassen.

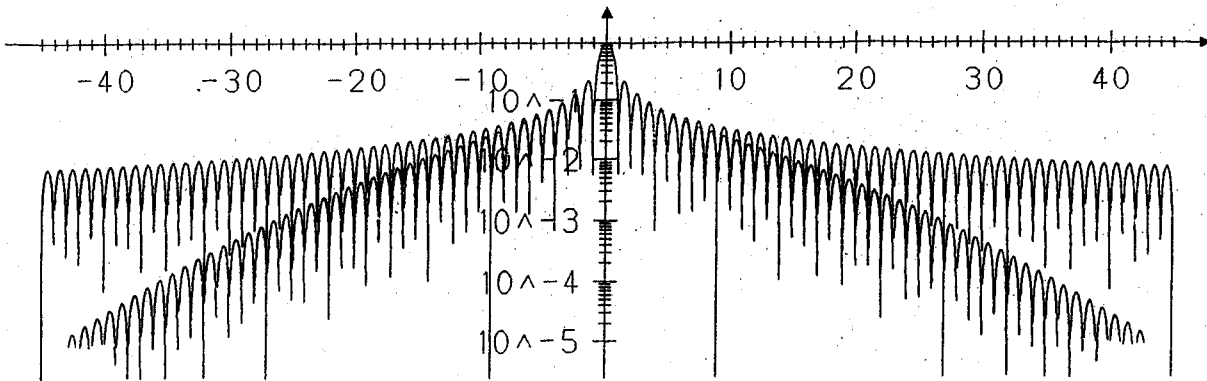


Bild 4.14: Die zeitbegrenzte Interpolationsfunktion im Vergleich zum si

Hingegen ist der Bildbereich sämtlicher anderer Transformationen nicht identisch mit dem meßtechnisch erfaßbaren Spektrum.

Wenn gelegentlich in der Literatur der Bildbereich jeder Transformation mit „Spektrum“ bezeichnet wird, ist das eine rein formale Bezeichnung, die sehr wenig oder nichts mit einem physikalisch meßbaren Spektrum zu tun hat.

Im allgemeinen ist somit auch das Ergebnis einer Digitalen Fourier-Transformation (DFT/FFT) nicht mit einem meßbaren Spektrum identisch.

Da andererseits die Abweichungen zwischen dem Ergebnis einer DFT und einem meßbaren Spektrum nicht allzu groß sind, lassen sich Bedingungen dafür angeben, daß diese Abweichungen minimal werden.

Bild 2.1 auf Seite 3 hat hierzu bereits die Problematik aufgezeigt, welche in der Periodizität sowohl im Zeit- als auch im Frequenz-Bereich bei einer DFT begründet ist. Durch diese Periodizität entsteht ein Alias-Effekt, der für die Abweichungen verantwortlich ist.

### 5.1 Struktur eines FFT-Analysators

Ein Meßgerät zur digitalen Bestimmung eines Spektrums mit einer DFT/FFT heißt FFT-Analysator. Seine Struktur ist in Bild 5.1 gegeben. Die Eingangssignale sind analog.

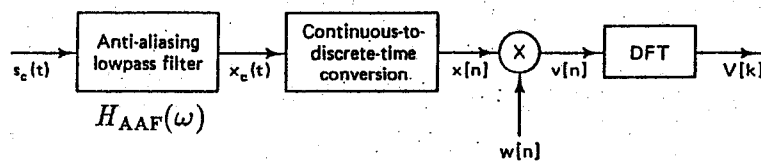


Bild 5.1: Blockschaltbild eines FFT-Analysators

Da die Takt-Frequenz  $\omega_A$  des digitalen Teils festliegt, muß mittels eines Anti-Aliasing-Filters (AAF) dafür gesorgt werden, daß die Spektralanteile, die größer als  $\omega_A/2$  sind, vom digitalen Teil ferngehalten werden. Hierfür dient das AAF-Tiefpaßfilter.<sup>2</sup> Die Grenzfrequenz eines FFT-Analysers ist also  $\omega_g < \omega_A/2$ .

<sup>2</sup>Zur Vermeidung eines steilflankigen analogen TP-Filters wird in der Praxis (zusätzlich) eine digitale TP-Filterung — verbunden mit Oversampling — angewendet.

Nach der Zeit-Diskretisierung tritt im Spektrum eine Periodizität auf. Da aufgrund der DFT/FFT der Spektralbereich ebenfalls diskretisiert wird, tritt damit auch im Zeitbereich eine Periodizität auf. Zur Vermeidung von Überlappungen im Zeitbereich (und dem daraus folgenden Alias-Effekt), wendet man eine Zeit-Fensterung  $w[n]$  an. Hierdurch ergibt sich jedoch eine Veränderung im Spektrum, weil nun mit der Transformierten der Fensterfunktion  $W(e^{j\Omega})$  hier gefaltet wird.

Die Verhältnisse im Frequenzbereich sind in Bild 5.2 dargestellt, wobei auf die Signale in Bild 5.1 Bezug genommen wird.

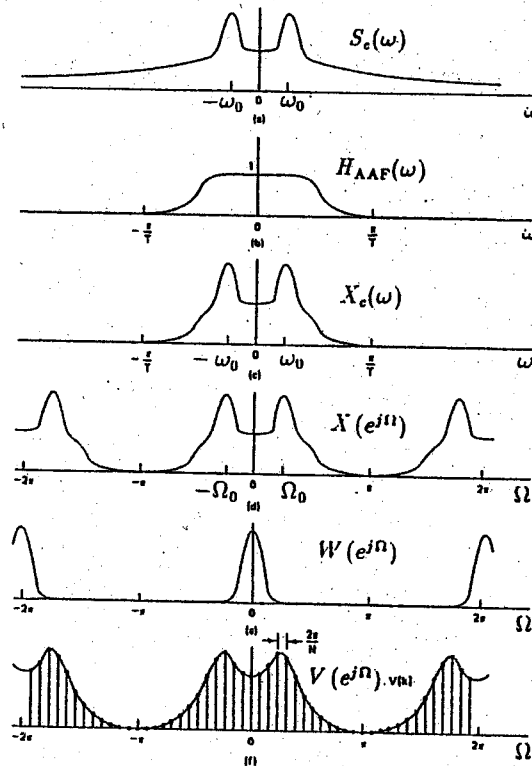


Bild 5.2: Die Verhältnisse im Frequenzbereich bei der Bestimmung einer DFT/FFT.

## 5.2 Analyse bandbegrenzter periodischer Signale

Periodische Signale — speziell Cos-Schwingungen — werden für Messungen vorzugsweise verwendet. Deshalb ist es besonders wichtig, daß die DFT/FFT für diesen Fall korrekte Ergebnisse liefert.

Schwierigkeiten entstehen dadurch, daß die DFT/FFT ihrerseits ebenfalls periodisch ist. Im allgemeinen passen die Perioden nicht „zusammen“, wenn nämlich die Fensterbreite (Intervallbreite) der DFT/FFT im Zeitbereich und die Signal-Periode ungleich sind.

### 5.2.1 Zeit-Fensterbreite der DFT/FFT ist ein ganzes Vielfaches der Signal-Periode

Das Ergebnis erhält man in diesem (speziellen) Fall am einfachsten mit einer graphischen Methode, wobei die Schritte gemäß Bild 2.1, Seite 3 für diesen Fall nachvollzogen werden, Bild 5.3, Seite 32.

Durch die Übereinstimmung von Periode der Zeitfunktion mit der Fensterbreite der DFT/FFT fallen die Nullstellen der Transformierten  $s(x)$  des  $\Pi$ -förmigen Fensters genau auf die  $\uparrow$ -Positionen.

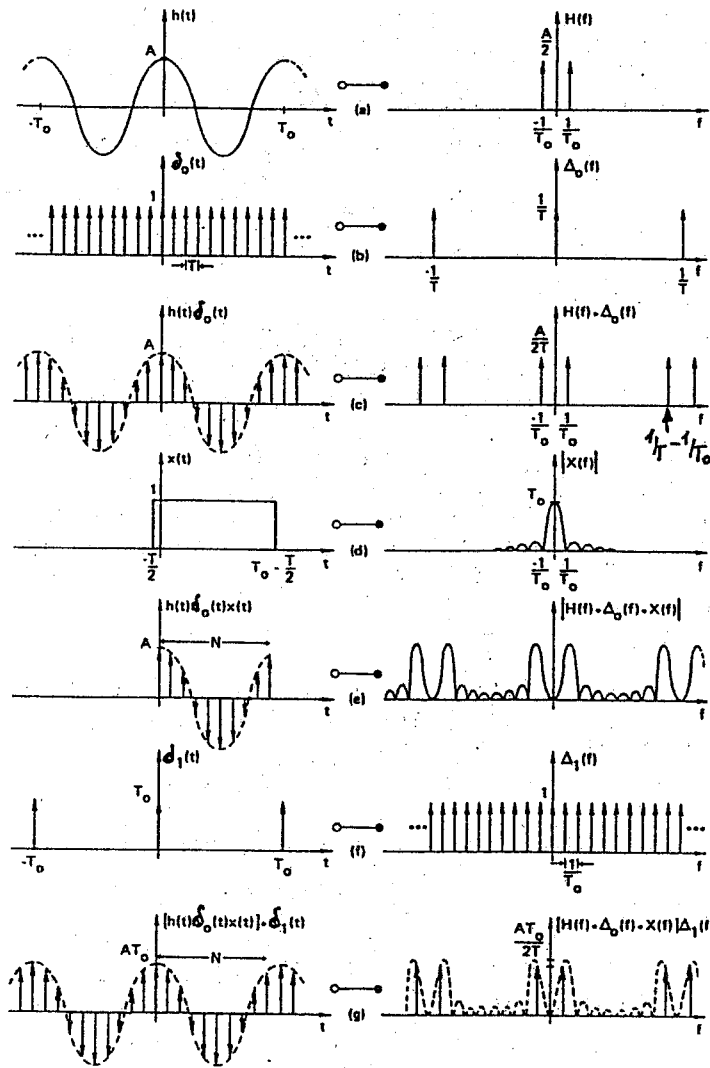


Bild 5.3: DFT eines bandbegrenzten periodischen Signals; Zeitfensterbreite = Signalperiode

Bild 5.4 zeigt dies im Detail für einen Ausschnitt aus Bild 5.3.

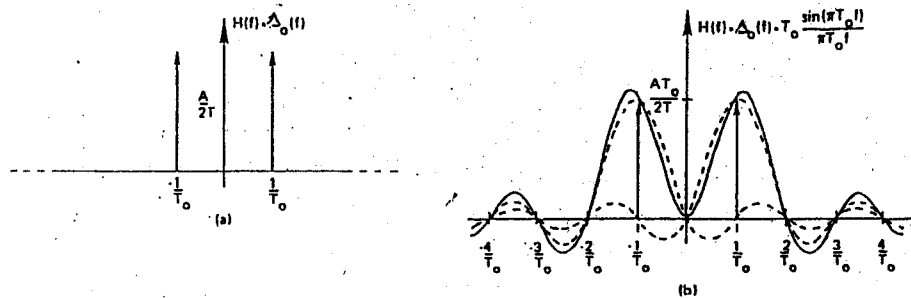


Bild 5.4: Ausschnitt der DFT eines Cos-Signals

Wie man hierbei erkennt, liefert die DFT/FFT für diesen Fall — bis auf einen Maßstabsfaktor

$$T_0/T = N ; \quad N : \text{Anzahl der „Punkte“ einer DFT/FFT} \tag{5.1}$$

ein gleichartiges Ergebnis wie die FT.



Einen Unterschied (zur FT) gibt es nur insofern, als das Spektrum nicht von  $-\omega_A/2$  bis  $+\omega_A/2$ , sondern im Intervall  $0 \leq \omega < \omega_A$  berechnet wird. Möchte man zu einer Darstellung im Intervall  $-\omega_A/2 \leq \omega < \omega_A/2$  kommen, müssen die Werte zyklisch verschoben werden.

Bei der praktischen Durchführung einer DFT/FFT-Analyse verwendet man einen mit dem FFT-Analysator gekoppelten Generator, damit die Bedingung „Zeit-Fensterbreite“ = „Signal-Periode“ erfüllt werden kann.<sup>3</sup> Damit ist man dann in der Lage, u.a. die Übertragungsfunktion  $H(\omega) = U_a(\omega)/U_e(\omega)$  eines Systems nach Betrag & Phase zu bestimmen. Die Fensterfunktion im FFT-Analyser muß dazu auf  $\Pi$  eingestellt sein.

Der Maßstabsfaktor  $T_0/T = N$  im Ergebnis der DFT/FFT ist durch die Definition der DFT gemäß Gleichung (2.19) auf Seite 6 bestimmt. Hierdurch liefert die DFT/FFT unterschiedliche Amplitudenwerte im Spektrum, je nach Länge des Intervalls. Bild 5.5 zeigt dies an einem Beispiel für eine 6-Punkt & 12-Punkt DFT.

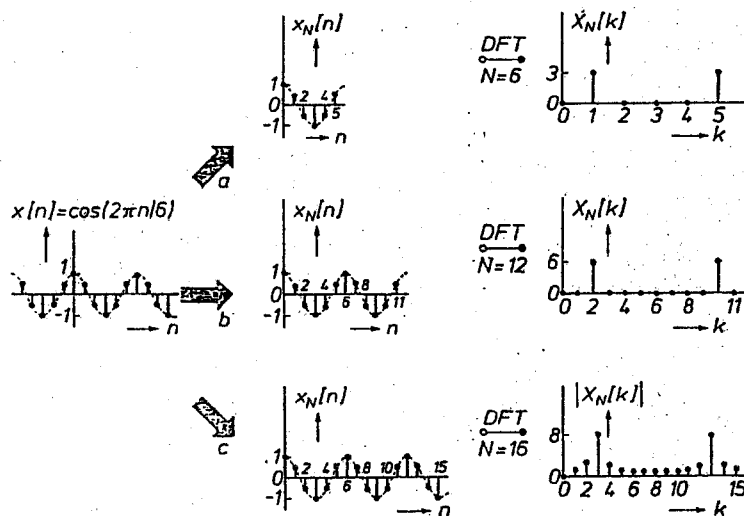


Bild 5.5: DFT mit 6, 12 & 16 Punkten einer Cos-Schwingung. Bei  $N = 16$  tritt „Leakage“ auf.

Für die Spektrums-Berechnung ist es jedoch unpraktisch, wenn je nach Länge des Intervalls (bei einer FFT z.B. 512, 1024, 2048) unterschiedlich große Amplituden der Spektralkomponenten entstehen. Man wird daher  $X[k]$  durch  $N$  dividieren (normieren), was dann auf eine gegenüber Gleichung (2.19) modifizierte Definition der DFT/FFT hinausläuft, wobei nunmehr der Faktor  $1/N$  bei  $X[k]$  erscheint.

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad \longleftrightarrow \quad x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad (5.2)$$

Gemäß dieser Definition ist die FFT in den FFT-Analysatoren implementiert.

### 5.2.2 Zeit-Fensterbreite der DFT/FFT ist kein Vielfaches der Signal-Periode

Den allgemeineren Fall, wo die Fensterbreite (Intervallbreite) der DFT/FFT nicht mit (einem Vielfachen) der Signalperiode übereinstimmt, zeigt Bild 5.5 (c).

<sup>3</sup>In diesen Generatoren wird der Cos bzw. Sin digital erzeugt. Dies geschieht z.B. mit EPROMS oder mittels NCOs (numerical controlled oscillator). I.a. sind auch noch andere Signalformen (Sägezahn, Dreieck, Rechteck, Pseudo-Random) implementiert, die diese Bedingung erfüllen.

Zur Verdeutlichung des Sachverhaltes werden die beiden Fälle für eine 32-Punkt FFT in Bild 5.6 nebeneinander dargestellt.

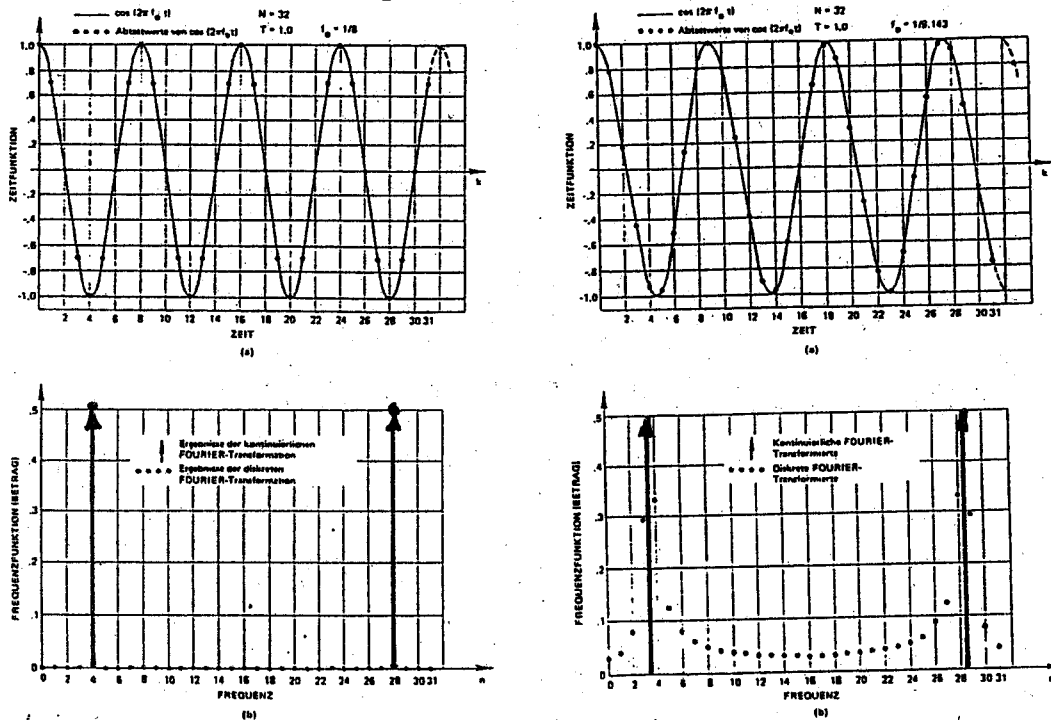


Bild 5.6: FTD und 32 Punkt FFT für Cos-Schwingungen unterschiedlicher Perioden.

Für den Fall „Fensterbreite  $\neq k \cdot$  Periodendauer“ erkennt man daraus:

1. Wird der im Fenster-Intervall dargestellte Zeitverlauf periodisch fortgesetzt, ergibt sich keine durchgehende Cos-Schwingung, sondern an der Intervall-Grenze entsteht ein Sprung bzw. eine Unstetigkeit.
2. Da zu Sprüngen im Zeitbereich im Frequenzbereich hohe Frequenzen (Vielfache der Grundfrequenz) gehören, entstehen zusätzliche <sup>4</sup>.
3. Bezogen auf die ursprüngliche Zeitfunktion (ohne Sprünge!) zeigt das so berechnete Spektrum aber jetzt zusätzliche Linien, die mit Leakage bezeichnet werden.
4. Da die DFT/FFT im Frequenzbereich nur  $N$  Abtastwerte berechnet (Sampling im Frequenzbereich), fällt die Frequenz der Cos-Schwingung mit keinem Abtastwert zusammen, sondern liegt dazwischen.
5. Die DFT/FFT liefert deshalb auch nicht die korrekte Amplitude der Spektrallinie.<sup>5</sup> Diese muß durch Interpolation gewonnen werden.
6. Da die zu analysierende Zeitfunktion jetzt keine Symmetrie mehr hat, entsteht ein Real- & Imaginär-Teil (bzw. Betrag & Phase) bei der DFT/FFT.

Für den speziellen Fall, daß exakt eine halbe Periode der Cos-Schwingung abgeschnitten wird, läßt sich in Kombination mit Bild 5.4 die Entstehung der „Leakage“-Linien sehr schön zeigen, Bild 5.7

<sup>4</sup>Die DFT/FFT analysiert, für sich genommen, daher schon richtig, abgesehen vom Alias-Effekt.

<sup>5</sup>Man spricht in diesem Zusammenhang vom „picked fence“-Effekt (Gartenzaun-Effekt).

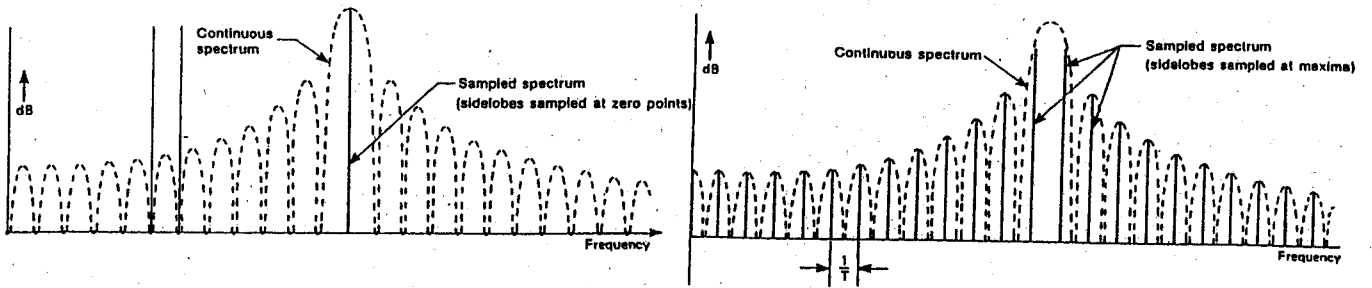


Bild 5.7: Gestrichelt: Fourier-Transformation eines Cos-Bursts (Ausschnitt aus einer Cos-Schwingung); links: Burst enthält eine volle Anzahl von Cos-Perioden; rechts: Burst endet mit einer halben Periode.

Zur näherungsweisen Bestimmung der exakten Frequenz & Größe einer Spektral-Linie wird in der Praxis ein Interpolationsverfahren angewendet, wie es Bild 5.8 zeigt. Hier wird bei der FFT-Analyse ein Hanning-Fenster ( $\cos^2$ -Form) verwendet.

Aufgrund der  $\cos^2$ -Form des Hanning-Fensters erhält dessen Transformierte im Frequenzbereich bezogen auf den Linienabstand die Gewichtungsfaktoren  $1/2, 1, 1/2$ .<sup>6</sup> Trifft man in der FFT bei einem Maximum auf einen solchen Fall, ist damit sicher, daß die Frequenz der Komponente genau getroffen wurde, Bild 5.8 links. Der Faktor  $1/2$  ist hier  $\Delta dB = 6dB$ . Für die anderen Fälle erfolgt die Interpolation, die sowohl die Frequenz als auch den Pegel der maximalen Linie ergibt. Für andere Fensterformen ergeben sich andere Werte für die Interpolation, die sich entsprechend bestimmen lassen.

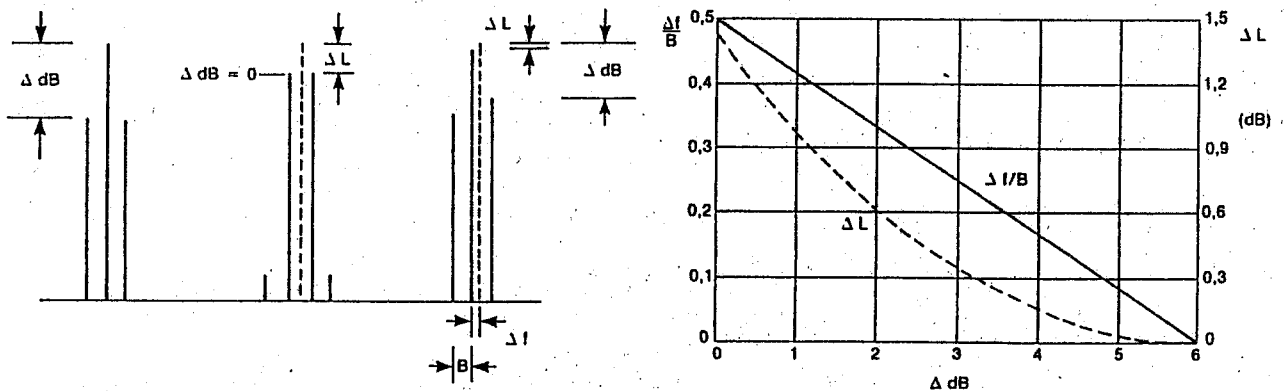


Bild 5.8: Interpolation zur Bestimmung der exakten Liniengröße, falls die Linien nicht auf der exakten Frequenz liegen. (Hanning-Fensterung)

Weitere Beispiele zeigen die Addition von 2 Cos Schwingungen und die 64-Punkt DFT/FFT in Real- & Imaginär-Teil und in Betrag & Phase. Zum Vergleich ist die Fourier-Transformierte für diskrete Signale angegeben.

Das 1. Beispiel lautet

$$v[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + 0,75 \cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right) & 0 \leq n \leq 63 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.3)$$

Die Ergebnisse sind in Bild 5.9 zu sehen.

<sup>6</sup>Die Verhältnisse sind entsprechend zu Bild 5.4. Statt dem  $\sin$  ist jetzt aber die Transformierte der  $\cos^2$ -Kuppe zu verwenden.

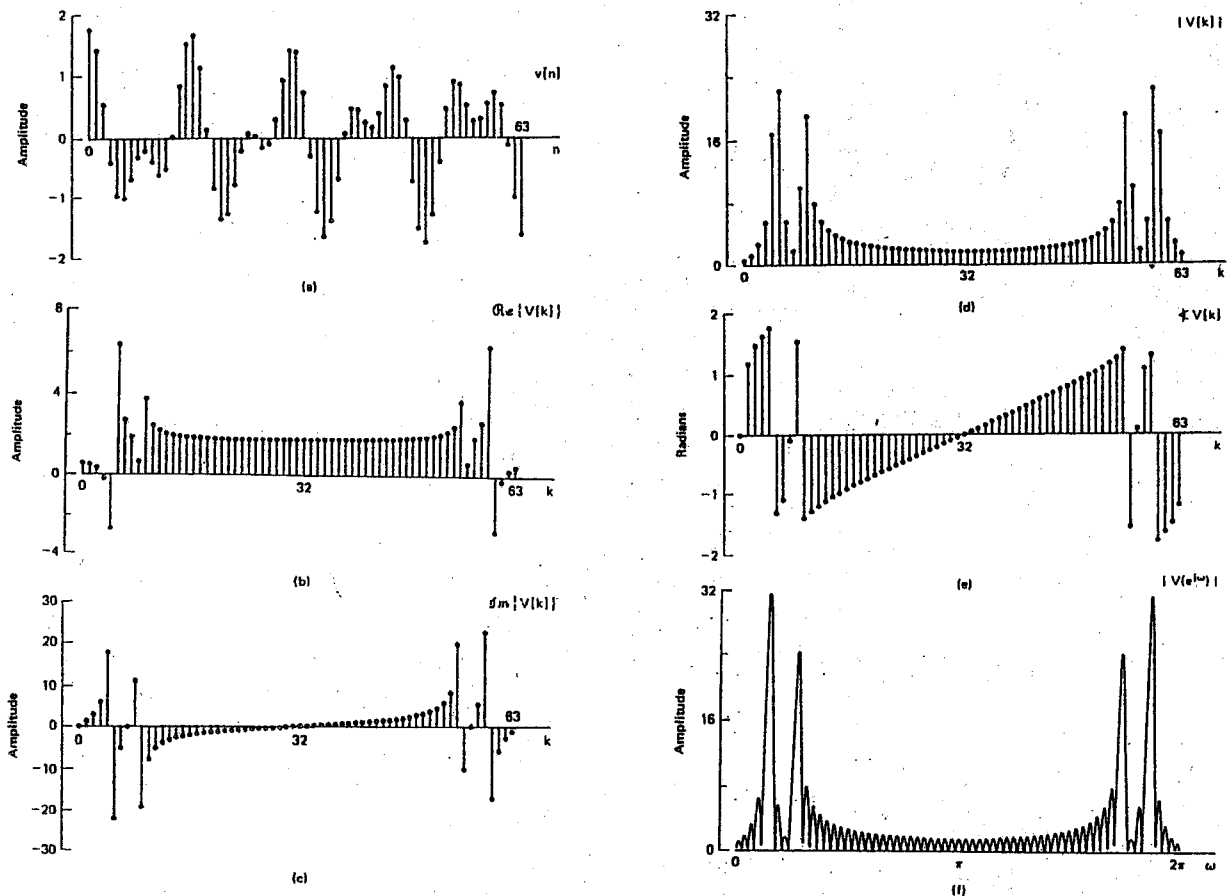


Bild 5.9: Cos-Folge und 64-Punkt FFT in Real- & Imaginär-Teil und in Betrag & Phase. Zum Vergleich der Betrag der FTD für zeitdiskrete Signale FTD

Bei diesem Beispiel fällt auf, daß das Leakage sehr groß ist und die Frequenzen nicht genau getroffen werden. Die so gewonnene DFT/FFT läßt sich damit kaum als Spektrum interpretieren, sondern führt auf große Fehler.

Im 2. Beispiel sind nur die Frequenzen leicht geändert gegenüber dem 1. Beispiel:

$$v[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right) + 0,75 \cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right) & 0 \leq n \leq 63 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.4)$$

Die hier zugehörigen Ergebnisse sind für eine 64-Punkt DFT/FFT, eine 128-Punkt DFT/FFT (für die die Zeitfolge durch Addition von Nullen (zero padding) auf 128 Punkte verlängert wurde) und eine FTD in Bild 5.10 dargestellt.

Die Ergebnisse zeigen folgende Eigenschaften:

- Die Zeitfunktion ist jetzt gerade, es gibt nur einen Realteil.
- Für die 64-Punkt DFT/FFT fallen die Nullstellen der Transformierten (si-Funktion) des  $\Pi$ -Fensters genau auf die Positionen der  $\uparrow$ , so daß keine Leakage entsteht. Dies entspricht der Spektralverteilung einer periodischen Funktion.
- Eine 128-Punkt DFT/FFT mit Zero-Padding (von 64 auf 128) liefert zwar eine bessere spektrale Auflösung, ist hier dagegen ungünstiger, da jetzt die Nullstellen der Transformierten

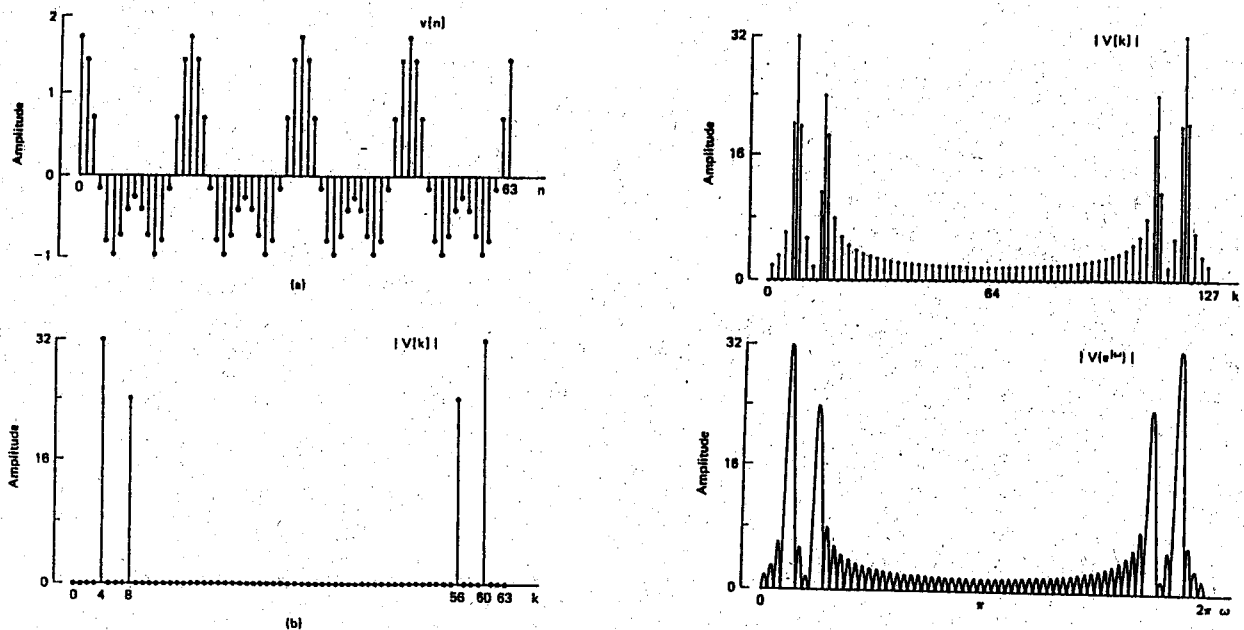


Bild 5.10: Cos-Folge und 64-Punkt FFT, 128-Punkt FFT und FTD

des  $\Pi$ -Fensters nicht auf die  $\Pi$ -Positionen fallen, so daß Leakage auftritt. Dies entspricht der Spektralverteilung einer  $\Pi$ -förmig begrenzten Funktion.

### 5.2.3 Anwendung von Fensterfunktionen zur Reduzierung des "Leakage"-Effektes

Der Leakage-Effekt entsteht immer dann, wenn die Periode der zu analysierenden Funktion nicht mit der Periode der DFT/FFT übereinstimmt. In diesem Fall entsteht eine Sprungstelle. Diese muß vermieden werden, wenn der Leakage-Effekt verhindert werden soll. Allerdings ergibt sich daraus auch eine Veränderung der Form des zu analysierenden periodischen Signals, Bild 5.11.

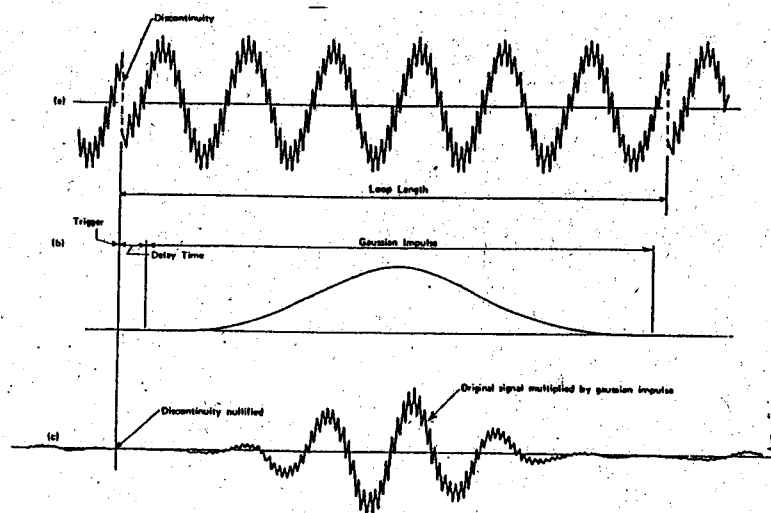


Bild 5.11: Fensterung eines periodischen Signals

Das Problem besteht nun darin, wie man trotz der veränderten Form der Zeitfunktion die korrekte Spektralverteilung erhält, also die des ursprünglichen periodischen Signals. Hierzu sei zunächst das

Beispiel in Bild 5.6 rechts, Seite 34, betrachtet. Mit Hilfe eines Hanning-Fensters ( $\cos^2$ -Form) erhält man die Ergebnisse von Bild 5.12.

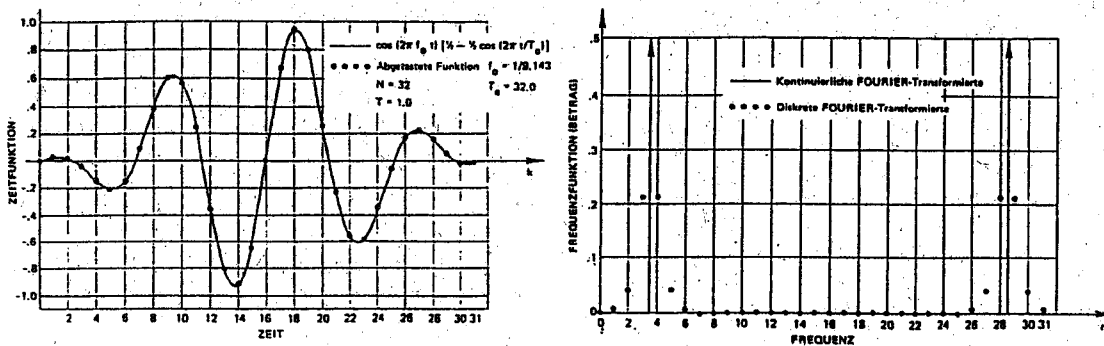


Bild 5.12: Reduzierung des Leakage-Effekts mittels Hanning-Fensterung

Aus diesem Beispiel erkennt man:

- Die  $\uparrow$  liegen nicht auf der exakten Frequenz, da die Perioden der Schwingung und der DFT/FFT in keinem ganzzahligen Verhältnis stehen.
- Zur Ermittlung der exakten Frequenz ist eine Interpolation gemäß Bild 5.8 nötig.
- Die Größe der  $\uparrow$  ist zu klein. Hier ist ebenfalls eine Interpolation gemäß Bild 5.8 erforderlich.
- Nach Bild 5.8 ergibt sich  $1,5dB \doteq 1,188$ .
- Dieser Wert ist um den Faktor 2 zu klein, weil im Unterschied zu Bild 4.2 (Seite 20) hier ein Hanning-Fenster der Amplitude 1 verwendet wurde, wie aus der Zeitfunktion zu erkennen ist.

Als weiteres Beispiel wird die Folge aus Bild 5.9, Seite 36, betrachtet. Hier wird ein Kaiser-Fenster mit  $\beta = 5,48$  verwendet, das auf eine Größe der Nebenmaxima  $A_{sl} < -40dB$  führt. Damit lautet die gefensterterte Folge:

$$v[n] = w_K[n] \cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + w_K[n] \cdot 0,75 \cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right) \quad (5.5)$$

Der Unterschied zwischen den beiden (normierten) Frequenzen beträgt

$$\frac{2\pi}{7,5} - \frac{2\pi}{14} = 0,389 \quad (5.6)$$

Für das Kaiser-Bessel-Fenster der Länge  $L = 64$  mit  $\beta = 5,48$  errechnet sich mit Gleichung (4.11), Seite 25, für die Breite des Hauptmaximums des Fensters  $\Delta_{ml} = 0,401$ . Die an die Stelle der beiden Frequenzen erscheinenden Hauptmaxima der transformierten  $W_K(e^{j\Omega})$  des Bessel-Fensters werden sich nur gering überlappen. Die DFT/FFT liefert somit zwei deutlich unterscheidbare Maxima im Frequenzbereich, Bild 5.13.

Für eine exakte Bestimmung der Frequenzen und der Linien-Höhen muß auch hier interpoliert werden. Die Interpolationswerte sind jedoch (etwas) verschieden von denen des Hanning-Fensters. Wie man aus dem Vergleich mit Bild 5.9 zudem erkennt, hätte das Fenster ebenfalls eine größere Amplitude ( $\approx 2$ ) benötigt, damit die Liniengröße im Falle eines periodischen Signals den richtigen Wert ergibt.

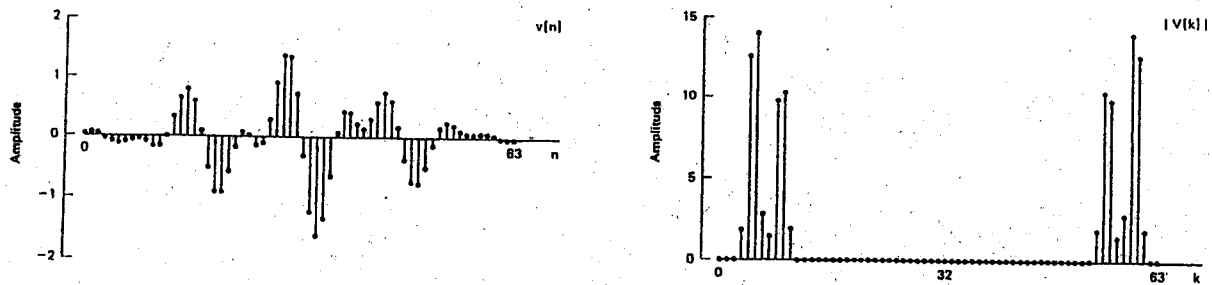


Bild 5.13: Zeitfunktion mit Kaiser-Bessel-Fenster und DFT/FFT

Das Beispiel Gleichung (5.5) soll nun mit einer 32-Punkt FFT untersucht werden. Man hat also einen kürzeren Ausschnitt aus dem Zeitverlauf. Das Fenster hat hier die Breite entsprechend zur „Punkt-Zahl“ der FFT, hier also 32.

Da sich mit ansonsten unveränderten Werten gegenüber dem vorausgegangenen Beispiel jetzt die Breite des Hauptmaximums der Transformaten der Fensterfunktion verdoppelt auf  $\Delta_{ml} = 0,815$ , lassen sich die Maxima im Frequenzbereich nicht mehr trennen, womit auch keine sinnvolle Interpolation mehr möglich ist, Bild 5.14.

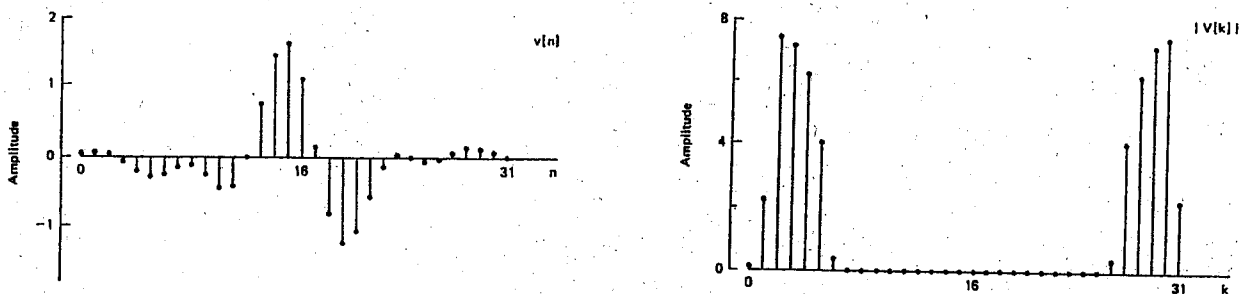


Bild 5.14: Eine Verkürzung des Abschnittes der zu analysierenden Zeitfunktion führt in der DFT/FFT auf nicht mehr trennbare Maxima.

Behält man die gefensterter Zeitfolge gemäß Bild 5.14 bei, verlängert jedoch das Intervall der DFT/FFT durch „Zero-Padding“, erhält man zwar insofern eine bessere spektrale Auflösung als in Bild 5.14 als nun zusätzliche Zwischenpunkte berechnet werden. Da aber der Ausschnitt aus der Zeitfolge gleich lang geblieben ist, ändert sich nichts am grundsätzlichen Charakter der Transformaten, so daß man keine bessere Frequenzauflösung erhält. Bild 5.15 zeigt dies für eine Auffüllung mit „Nullen“ bis 64 bzw. 1024.

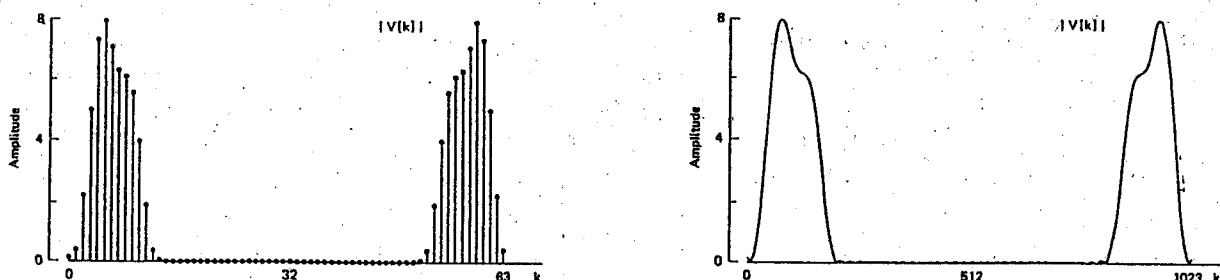


Bild 5.15: Zero-Padding eines zu kurzen Ausschnittes aus einer Zeitfolge ergibt keine bessere Spektralaufklärung.

Geht man hingegen auf die Zeitfolge in Bild 5.13 zurück und ergänzt mit Zero-Padding auf 1024

Punkte, erhält man eine ausreichende Spektralaufösung, Bild 5.16. Dies ist deshalb nicht verwunderlich, weil sich hierfür mit Hilfe von Gleichung (4.11) ergab, daß die Hauptmaxima sich hier trennen lassen.

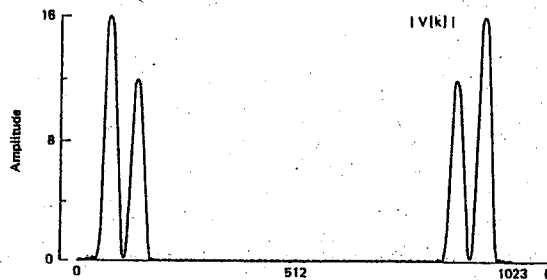


Bild 5.16: Zero-Padding eines ausreichend langen Ausschnittes aus einer Zeitfolge führt auf eine befriedigende Spektralaufösung.

Aus dieser DFT/FFT lassen sich die Frequenzen der Spektrallinien ausreichend genau bestimmen. Ein Vergleich mit Bild 4.9 zeigt jedoch wieder, daß die Liniengröße aufgrund der Fensterung um den Faktor 2 zu klein ausfällt.<sup>7</sup>

An den gezeigten Beispielen ist das **Zeit-Bandbreiten-Gesetz** gut zu erkennen. Es kann hier so formuliert werden:

- Fenster-Länge      ○—●      Spektrale Auflösung
- DFT/FFT-Länge    ○—●      Linienableit
- Zero-Padding      ○—●      Oversampling

Gemäß dem Vertauschungs-Satz gelten diese Zusammenhänge auch im umgekehrten Fall.

## 6. Zoom-DFT/FFT

Aufgrund der Definitionsgleichungen für die DFT/FFT wird die Spektralverteilung stets unter Einschluss der Frequenz Null berechnet. Man erhält daher immer die Spektralverteilung von Null bis zur halben Abtastfrequenz. Dies entspricht einer einseitigen Frequenz-Darstellung und ist bei FFT-Analysatoren üblich.<sup>1</sup>

Bei einer praktischen Spektral-Analyse interessiert jedoch häufig ein Spektral-Bereich, der die Frequenz Null nicht enthält. Bild 6.1 zeigt eine gemessene Spektralverteilung und eine Ausschnitt-Vergrößerung (Zoom) aus dieser Spektralverteilung.

Bei der Spektral-Analyse eines Hochfrequenz-Signals mit einem analogen Spektrum-Analyzer ist diese Eigenschaft selbstverständlich. Hierzu wird die Mittenfrequenz des Umsetz-Oszillators entsprechend eingestellt.<sup>2</sup>

Ein solches Verfahren läßt sich aber auch bei der DFT/FFT anwenden. Mit Hilfe einer (komplexen) Frequenz-Umsetzung durch eine Multiplikation mit der komplexen Schwingung<sup>3</sup>  $e^{-j\omega_k t}$  wird

<sup>7</sup>Die Fensteramplitude hätte also hier etwa zu 2 gewählt werden müssen, damit sich trotz Fensterung die Linienhöhe richtig ergibt.

<sup>1</sup>Der von FFT-Analysatoren darstellbare Frequenz-Bereich reicht i.a. bis zu 80 % der Abtastfrequenz ( $0,8 \cdot f_A$ ).

<sup>2</sup>Im Unterschied zu analogen Spektrum-Analysern, die in eine (hochliegende) Zwischenfrequenz umsetzen, wird bei der DFT/FFT immer in das Basisband (unter Einschluss der Frequenz 0) umgesetzt.

<sup>3</sup>Als Blockschaltbild erhält man für eine komplexe Frequenz-Umsetzung eine I- / Q-Struktur mit Multiplikation mit Cos im I-Zweig und mit Sin im Q-Zweig.



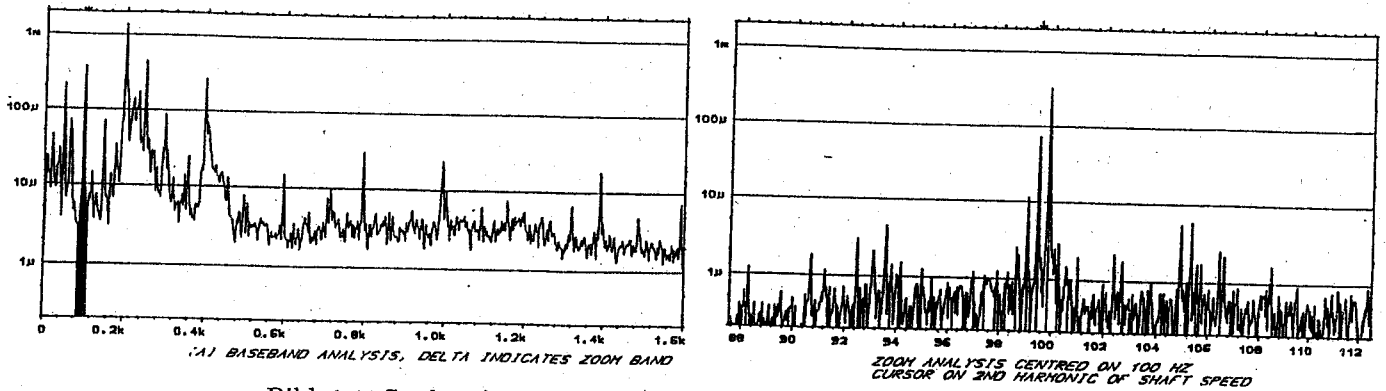


Bild 6.1: Spektralverteilung und Ausschnitt-Vergrößerung (Zoom)

der interessierende Frequenzbereich  $\omega_k$  auf die Frequenz Null heruntergeschoben und dann einer DFT/FFT unterzogen. Bild 6.2 zeigt die Blockstruktur einer Zoom-DFT/FFT.

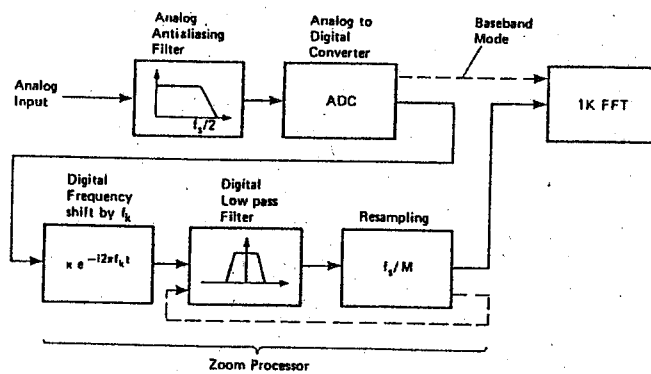


Bild 6.2: Blockschaltbild eines Zoom-DFT/FFT-Analyzers

Die Multiplikation mit dem komplexen Faktor  $e^{-j\omega_k t}$  ist für alle Abtastwerte identisch. Dadurch ist die Berechnung viel einfacher als bei der Durchführung der DFT, bei der jeder Abtastwert mit einem anderen komplexen Faktor zu multiplizieren ist.<sup>4</sup> Die Abtastwerte werden nach der Multiplikation komplex, d.h. man hat 2 Datenströme für die Abtastwerte.<sup>5</sup>

Wie aus Bild 6.2 zu erkennen ist, muß das Ergebnis der Umsetzung anschließend einer digitalen Tiefpaß-Filtrierung unterzogen werden, wodurch dann nur noch der interessierende Ausschnitt übrig bleibt.

Da nunmehr die Grenzfrequenz sehr viel kleiner ist als bei dem ursprünglichen Signal, kann man jetzt eine Abtastraten-Verminderung vornehmen. Die nun noch verbleibenden Abtastwerte werden einer DFT/FFT unterzogen und liefern dadurch das gezoomte Spektrum.

Alternativ gibt es folgende Methode für das Zoomen. Soll um den Faktor  $Z$  gezoomt werden, wählt man die  $Z$ -fache Zahl von Abtastwerten  $Z \cdot M$ . Damit man nun jedoch nicht auch noch eine FFT mit der  $Z$ -fachen Anzahl von Punkten durchführen muß, werden statt dessen  $Z$  einfache FFT's mit  $M$  Punkten durchgeführt. Hierzu wählt man für die erste FFT die Punkte  $0, Z, 2Z, \dots$ , für die 2. FFT die Punkte  $1, Z+1, 2Z+1, \dots$  usw. Aus allen diesen Teil-FFT's bildet man anschließend die Summen-FFT für den gewünschten Zoom-Ausschnitt. Zur Bildung der Summe müssen die Teil-FFT's mit dem jeweiligen Phasenfaktor multipliziert werden.

<sup>4</sup>Die FFT unterscheidet sich von der DFT darin, daß die Anzahl der Multiplikationen minimiert wird.

<sup>5</sup>Die FFT arbeitet grundsätzlich mit komplexen Datenströmen. Für ein reelles Zeitsignal sind für den Imaginärteil Nullen einzugeben.

Diese Methode verlangt die Zwischenspeicherung der Eingangsdaten. Daher ist hiermit kein "online"-Betrieb möglich.

## 7. Anwendung der Fensterung bei der Schnellen Faltung

Bei endlich langer Impulsantwort  $h[n]$  benötigt die Schnelle Faltung keinerlei Fensterung. Bandbegrenzte Systeme haben jedoch theoretisch eine  $\infty$  lange Impulsantwort. Mittels Fensterung im Frequenzbereich soll dafür gesorgt werden, daß die Impulsantwort praktisch endlich lang wird, so daß die Schnelle Faltung anwendbar wird.

Das hierfür geeignete Fenster ist das modifizierte Gauß-Fenster, gemäß den Gleichungen (4.17, 4.24) und Bild 4.12, das als Gleichung (7.1) hier zitiert wird.

$$W_s(\omega) = \frac{\pi}{\omega_m} e^{-\pi(\omega/2\omega_m)^2 \left\{ \frac{1}{2\pi} \right\}} \Pi_{\omega_c}(\omega) \quad \bullet \text{---} \circ \quad w_s(t) = e^{-\pi(t/2t_m)^2} \cdot \frac{\pi}{\omega_c} \cdot \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} \quad (7.1)$$

Durch Anwendung dieser Fensterung erhält man eine endlich lange (Zeit-begrenzte) Impulsantwort  $v(t)$ , Bild 7.1.

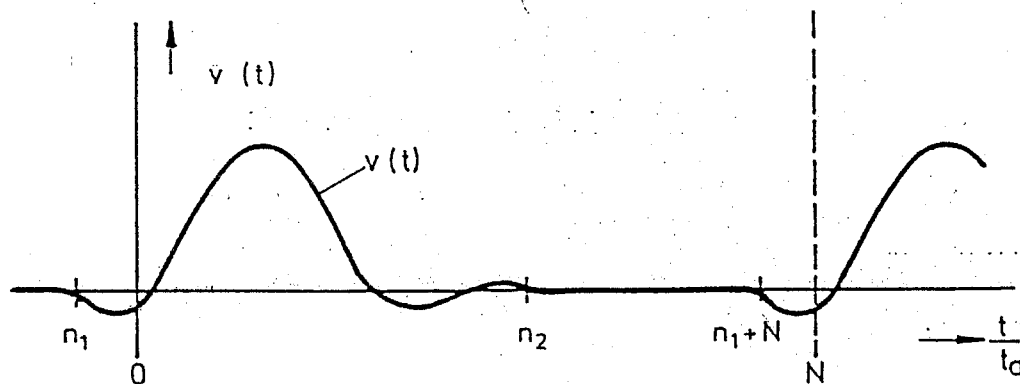


Bild 7.1: Beispiel für eine Zeit-begrenzte Impulsantwort  $v(t)$

Da das System (Filter) i.a. eine Phasendrehung hat, entsteht bei der Impulsantwort-Folge  $v[n]$  eine zyklische Verschiebung. Daher wird der Anfang von  $v[n]$  nicht mit dem Anfang  $n = 0$  des DFT/FFT-Intervalls zusammenfallen.

Die Anwendung der Schnellen Faltung verlangt jedoch, daß hier Übereinstimmung bei den beiden Anfängen ist. Diese Schwierigkeit umgeht man dadurch, daß man das „Ergebnis-Intervall“ für  $v[n]$  bestimmt und dann  $v[n]$  neu durchnummeriert.

### 7.0.4 Bestimmung des Ergebnis-Intervalls

Das Ergebnis-Intervall findet man dadurch, daß man das Intervall  $\{n_2 + 1, n_1 + N - 1\}$  auf Werte  $\rightarrow 0$  hin absucht.

Das Intervall  $\{n_2 + 1, n_1 + N - 1\}$  seinerseits wird gefunden, indem man ausgehend vom Maximalwert  $v_{max}$  schrittweise nach beiden Seiten das Intervall  $n_1, n_2$  so weit vergrößert, bis die Summe  $R$  unter einer vorgegebenen Schwelle  $R_s$  bleibt.

$$R = \frac{2t_a}{V_{max}} \sqrt{\sum_{k=n_2+1}^{N+n_1-1} |v_k|^2} \leq R_s \quad (7.2)$$

Hierbei sind:

$$\begin{aligned} t_a & \text{ Abtastzeit} \\ V_{max} & = \max_n |V_n| \text{ Zentralordinate } \doteq \text{Fläche von } v(t) \\ R & \leq R_s = 10^{-4} \text{ vorgegebene Schwelle} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Damit ist sichergestellt, daß der Effektivwert des Fehlersignals am Ausgang des Filters mindestens um den Faktor  $10^4$  kleiner ist als der Effektivwert der Eingangsgröße.

## 8. Die Fast Fourier Transformation (FFT)

Die FFT stellt einen Algorithmus zur schnellen numerischen Berechnung der DFT dar. Genau genommen gibt es für die DFT eine ganze Reihe sich in Details unterscheidender Algorithmen, die pauschal als FFT bezeichnet werden. Das Ziel ist jeweils, die Anzahl der (komplexen) Multiplikationen zu minimieren, weil sich hieraus ein Geschwindigkeitsvorteil bei der Berechnung ergibt.

### 8.1 Herleitung der FFT aus der DFT

Zur Herleitung der FFT wird hier von der DFT gemäß Gleichung (5.2) ausgegangen, die hier als Gleichung (8.1) zitiert wird.

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad \longleftrightarrow \quad x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad (8.1)$$

Die Definition der DFT gemäß Gleichung (8.1) wird bei FFT-Analysern verwendet, da sie korrekte Liniengößen im Spektrum ergibt. Sie unterscheidet sich von der in der Literatur sehr verbreiteten Definition gemäß Gleichung (2.19) dadurch, daß der Faktor  $1/N$  nicht bei  $X[k]$ , sondern bei  $x[n]$  steht.

In dem hier verwendeten Beispiel wird eine 8 Punkte-Folge  $g[n] \longleftrightarrow G[k]$  betrachtet ( $N = 8$ ).<sup>1</sup> Schreibt man die linke Seite der Gleichung (8.1) für dieses Beispiel vollständig an, erhält man  $N = 8$  Gleichungen, die sich in Matrix-Schreibweise darstellen lassen.

$$\overline{G}_k = \frac{1}{N} A \overline{g}_n \quad (8.2)$$

Hierbei bedeuten:

$\overline{G}_k$  Spalten-Array, der die  $N$  komplexen Frequenzkomponenten enthält

$1/N$  Skalierungs-Faktor

A Quadratische Matrix mit Einheits-Vektoren

$\overline{g}_n$  Spalten-Array, der die  $N$  Stützwerte der Zeitfunktion enthält

Die Einheits-Vektoren entstehen aus den Faktoren  $W_N^{kn} = e^{-j2\pi kn/N}$ . Stellt man die Reelle Richtung als  $\uparrow$  und die Imaginäre Richtung als  $\leftarrow$  dar, so kommt man zu einer besonders anschaulichen Darstellung der Matrix A.

<sup>1</sup>Die Rücktransformation IFFT ist bis auf den Skalierungsfaktor und das Vorzeichen im Exponenten identisch.

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \\ G_6 \\ G_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \nearrow & \rightarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \uparrow \\ \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \downarrow & \rightarrow & \leftarrow & \uparrow \\ \uparrow & \searrow & \leftarrow & \nearrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \uparrow \\ \uparrow & \downarrow & \leftarrow & \nearrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \uparrow \\ \uparrow & \swarrow & \rightarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \uparrow \\ \uparrow & \swarrow & \rightarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \uparrow \\ \uparrow & \swarrow & \rightarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \uparrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

Die Vereinfachung bei der FFT kommt nun im 1. Schritt dadurch zustande, daß die Matrix A umsortiert wird, wodurch eine größere Symmetrie entsteht. Die so gewonnene Matrix B läßt sich formal aus der Matrix A durch „Bit-reverses“ Umsortieren der Zeilennummern erreichen.

Row number in B		Row number in A
0 0 0 (0)	↑	0 0 0 (0)
0 0 1 (1)	↑	1 0 0 (4)
0 1 0 (2)	↑	0 1 0 (2)
0 1 1 (3)	↑	1 1 0 (6)
1 0 0 (4)	↑	0 0 1 (1)
1 0 1 (5)	↑	1 0 1 (5)
1 1 0 (6)	↑	0 1 1 (3)
1 1 1 (7)	↑	1 1 1 (7)

Die umsortierte Matrix B läßt sich nunmehr in das Produkt von 3 Matrizen X, Y, Z aufspalten, die jeweils noch größere Symmetrien aufweisen.

$$\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \uparrow & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \uparrow & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow & 0 & 0 & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & \uparrow & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & \uparrow & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & \uparrow \\ \uparrow & 0 & 0 & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & \uparrow & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & \uparrow & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \uparrow & 0 & 0 & 0 & \uparrow \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

So ist die linke obere Sub-Matrix von Y ein Abbild von Z, jedoch mit der Ordnung N/2. Vergleicht man daraufhin die linke obere Sub-Matrix von X, stellt man fest, daß dies ein Abbild der linken oberen Sub-Matrix von Y ist, jedoch mit der Ordnung N/4 bezogen auf Z.

Weiter Vergleiche zeigen, daß man immer wieder auf diese Struktur trifft, allerdings i.a. in Verbindung mit den Dreh-Faktoren  $W_N^{kn}$ . Diese elementare Struktur wird wegen ihres Aussehens in der Darstellung als Signalfluß-Graph „Butterfly“ („Schmetterling“) genannt, Bild 8.1.

8.2 Decimation in Time, Decimation in Frequency

In Bild 8.2 ist die 8-Punkt FFT (ohne den Faktor 1/N) als Signalfluß-Graph dargestellt. Hierbei ist wieder die Bezeichnung  $x[n]$   $\circ \rightarrow$   $X[k]$  verwendet. Man erkennt dabei deutlich die „Butterfly“-Strukturen.

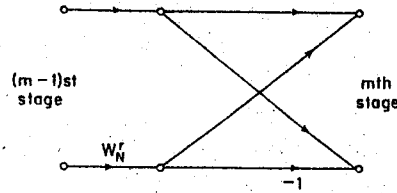


Bild 8.1: Butterfly-Struktur

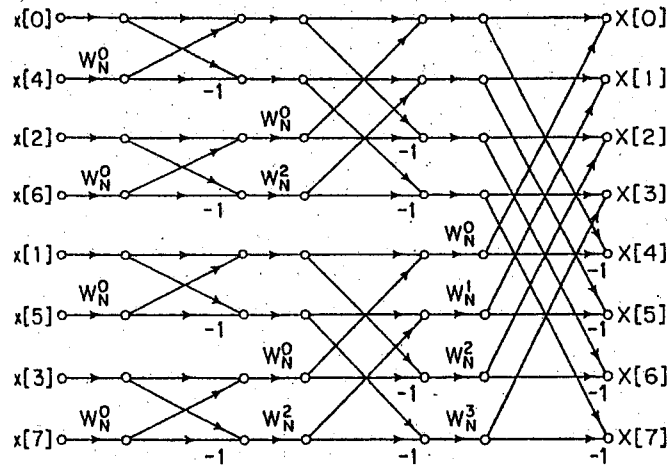


Bild 8.2: Signalfluß-Graph einer 8-Punkt FFT (Decimation in Time)

An den Eingängen der Struktur in Bild 8.2 ist die Bit-reverse Umsortierung erkennbar.

Da man hier von einer sukzessiven Vereinfachung im Zeitbereich ausgegangen ist, wird diese Vorgehensweise "Decimation in Time" genannt. Entsprechend kann man auch vom Frequenzbereich ausgehen und kommt dabei zu einem transponierten Signalfluß-Graphen. Dies wird dann "Decimation in Frequency" geheißen. Hier ist dann der Frequenzbereich Bit-revers umzusortieren, Bild 8.3

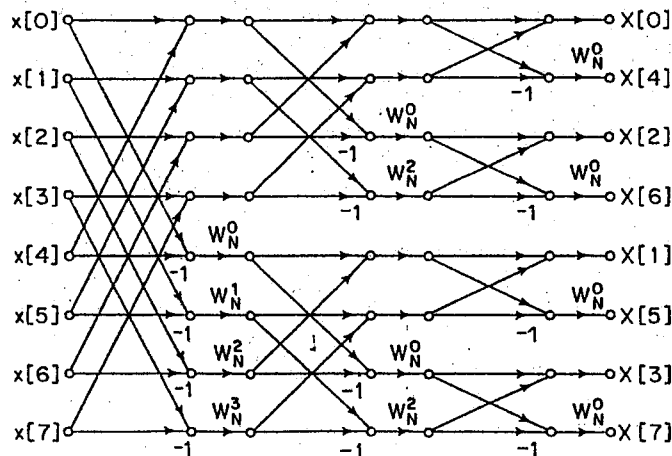


Bild 8.3: Signalfluß-Graph einer 8-Punkt FFT (Decimation in Frequency)

Beide Strukturen führen auf Algorithmen, bei denen die Ausgangs-Daten und die Ergebnis-Daten im gleichen Array abgelegt werden.

Die Arrays enthalten jeweils einen Real- & Imaginär-Teil, häufig in der Form:

$$\Re f(1), \Im f(1); \Re f(2), \Im f(2); \dots \quad (8.6)$$

Hat die zu transformierende Funktion z.B. keinen Imaginärteil, so sind die entsprechenden Plätze mit Nullen zu besetzen.

Hat man z.B. nur reellwertige Zeitfunktionen<sup>2</sup>, kann man zusätzlich die Symmetrien im Spektrum ausnutzen und damit Rechenzeit sparen. Eine reelle Zeitfunktion hat bekanntlich einen reell & geraden Spektralanteil, sowie einen imaginär & ungeraden Spektralanteil. Von beiden Teilen braucht aufgrund der Symmetrie dann also tatsächlich nur die Hälfte berechnet zu werden.

Wird der Algorithmus zur Berechnung der FFT an das Problem angepaßt, erhält man also eine noch größere Einsparung an Rechenleistung als es dem Normalfall entspricht, Bild 8.4 .

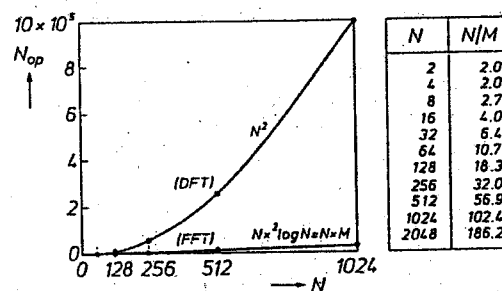


Bild 8.4: Vergleich des Rechenaufwandes von DFT und FFT

### 8.2.1 Fortran-Programm der FFT

Das Fortran-Programm, Bild 8.5, implementiert den "Decimation-in-Time" Algorithmus gemäß Bild 8.2 . Es entspricht dem ursprünglich von Cooley et. al. angegebenen Programm. Es handelt sich um keine besonders effiziente oder allgemeingültige Implementierung, aber es zeigt die zuvor angesprochenen Prinzipien. Es werden  $(N/2) \log_2 N$  komplexe Multiplikationen verwendet. Bei Fortran ist zu beachten, daß die Basis für eine Zählung 1 ist, d.h. es wird von  $1 \rightarrow N$  gezählt und nicht von  $0 \rightarrow (N - 1)$ .

<sup>2</sup>Bei der Zoom-FFT werden die Zeitfunktionen komplex.

```

C   FORTRAN SUBROUTINE FOR DECIMATION-IN-TIME FFT ALGORITHM
C   X IS AN N=2**NU POINT COMPLEX ARRAY THAT INITIALLY
C   CONTAINS THE INPUT AND FINALLY CONTAINS THE DFT.
C
SUBROUTINE DITFFT(X,NU)                                01
COMPLEX X(1024),U,W,T                                  02
N=2**NU                                                03
NV2=N/2                                                04
NML=N-1                                                05
PI=3.14159265358979                                    06
C*****                                                07
J=1                                                     08
DO 7 I=1,NML                                          09
  IF(I.GE.J) GO TO 5                                  10
  T=X(J)                                              11
  X(J)=X(I)                                          12
  X(I)=T                                              13
5     K=NV2                                           14
6     IF(K.GE.J) GO TO 7                              15
  J=J-K                                               16
  K=K/2                                               17
  GO TO 6                                             18
7     J=J+K
C*****                                                19
DO 20 L=1,NU                                          20
  LE=2**L                                             21
  LE1=LE/2                                           22
  U=(1.0,0.0)                                         23
  W=CMPLX(COS(PI/FLOAT(LE1)), -SIN(PI/FLOAT(LE1)))   24
  DO 20 J=1,LE1                                       25
    DO 10 I=J,N,LE                                    26
      IP=I+LE1                                        27
      T=X(IP)*U                                       28
      X(IP)=X(I)-T                                    29
10     X(I)=X(I)+T                                    30
20     U=U*W
C*****                                                31
RETURN                                               31
END                                                 32

```

Bild 8.5: Fortran-Programm für den Decimation-in-Time Algorithmus der FFT

## Literaturverzeichnis

- [1] A.V. Oppenheim; R.W. Schaffer: *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall 1989.
- [2] R.B. Randall; B. Tech: *Frequency Analysis*, Bruel & Kjaer 1989.
- [3] S. Gade; H. Herlufsen: *Use of Weighting Funktionen in DFT/FFT*, Bruel & Kjaer Technical Review Nr. 3 1987.
- [4] H.P. Kuchenbecker: *Frequenzökonomie im Mobilfunk*, Technischer Bericht BMFT TK 01589 1981.
- [5] J.G. Proakis; D.G. Manolakis: *Digital Signal Processing*, 2. ed. Maxwell Macmillan International 1992.
- [6] A.W.M. Van den Enden; N.A.M. Verhoecx: *Discrete-Time Signal Processing* Prentice-Hall 1989.



Er wollte doch einfach nur das Programm für den FFT-Algorithmus ausprobieren.