

# Spektren periodischer Zeitfunktionen

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Symmetrien von Zeitfunktionen und Spektren</b>	<b>2</b>
1.1	Zerlegung in geraden (even: e) und ungeraden (odd: o) Anteil . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Harmonische Signale</b>	<b>3</b>
2.1	Die phasenverschobene harmonische Schwingung . . . . .	3
2.1.1	Zur Messung der Nichtlinearität mittels harmonischer Signale . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Zeigerdarstellung harmonischer Signale</b>	<b>4</b>
3.1	Zeiger I: Rotierende Zeiger und negative Frequenz . . . . .	5
3.1.1	Die Negative Frequenz . . . . .	6
3.2	Zeiger II: Feststehende Zeiger mit Phasenverschiebung . . . . .	7
3.2.1	I/Q Übertragung digitaler Signale . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Die Reelle Fourierzerlegung</b>	<b>8</b>
4.1	Beispiel zur reellen Fourier-Analyse: Sägezahnschwingung . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Die Komplexe Fourier-Zerlegung</b>	<b>11</b>
5.1	Beispiel zur komplexen F-Zerlegung: Rechteck-Puls . . . . .	12
5.1.1	Interpretation der Spektrallinien als rotierende Zeiger . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Die si-Funktion</b>	<b>16</b>
6.1	Die Tangenten in den Nulldurchgängen der $\text{si}x$ Funktion . . . . .	17
6.2	Überleitung zur Fourier-Transformation . . . . .	17

## Abbildungsverzeichnis

1.1	Zerlegung einer Funktion in einen geraden und einen ungeraden Anteil . . . . .	2
1.2	Zerlegen eines Spektrums in seinen geraden und ungeraden Anteil . . . . .	3
2.1	Zerlegen einer phasenverschobenen harmonischen Schwingung . . . . .	4
3.1	Projektion der Kreisbewegung . . . . .	5
3.2	Darstellung der Cos- bzw. Sin-Schwingung durch rotierende Zeiger . . . . .	6
3.3	Spektrum einer harmonischen Schwingung in ein- und zweiseitiger Darstellung . . . . .	6
3.4	Komplexe Zeiger mit Phasenverschiebung und Aufspaltung in ihre $I$ und $Q$ Anteile . . . . .	7
3.5	I/Q Übertragung digitaler Signale . . . . .	8
4.1	Fourier-Analyse und -Synthese veranschaulicht mittels der „Filterbank“. $\tilde{s}(t)$ ist die „synthetisierte“ Zeitfunktion. Sie enthält keine spektralen Anteile mit $\omega > \omega_g$ . . . . .	9
4.2	Die Sägezahnschwingung im Zeitbereich . . . . .	10
4.3	Die Sägezahnschwingung im Frequenzbereich . . . . .	11
4.4	Synthese der Sägezahnschwingung aus Sinus-Schwingungen . . . . .	11
5.1	Rechteck-Puls (periodische Rechteckschwingung) . . . . .	12
5.2	Spektrum des Rechteck-Puls-Zuges (zweiseitige Darstellung); Der Linienabstand ist $\omega_0 = 2\pi/T$ . . . . .	13
5.3	Fourier-Synthese des Rechteck-Pulses mit Periode/Pulsbreite = 6 . . . . .	14
5.4	Fourieranalyse und -Synthese des Rechteck-Pulses mit Periode/Pulsbreite = 2 und Interpretation des Fourier-Spektrums als Momentanaufnahme rotierender Zeiger . . . . .	15
6.1	Die $\text{si}x$ Funktion in normierter Darstellung mit den Punkten $[\pm \frac{\pi}{2}/\frac{2}{\pi}]$ . . . . .	16
6.2	Die $\text{si}x$ Funktion mit Tangenten in ihren Nullstellen und den Hüllkurven . . . . .	17

## Spektren periodischer Zeitfunktionen

Im vorausgegangenen Kapitel **Frequenz, Spektrum, Resonanz** wurden die physikalischen Hintergründe des Begriffes „Frequenz“ dargelegt. Es wurde dabei gezeigt, daß Frequenz immer im Zusammenhang mit dem zugehörigen Meßgerät verstanden werden muß. Dieses Meßgerät enthält als charakteristischen Kern eine **Filterbank aus (verlustlosen) LC Kreisen**.

- Im theoretischen Grenzfall der Bandbreite dieser Filter  $B_\omega \rightarrow 0$  liefert dieses so definierte Meßgerät genau die gleichen Ergebnisse wie sie mittels der Fourier-Analyse berechnet werden können.

Für die traditionelle Fourier-Analyse sprechen die folgenden physikalischen Gründe:

- **Jede Übertragung ist bandbegrenzt.** Frequenzbänder und Bandgrenzen werden mittels Fourier beschrieben.
- Da rechteckförmige Zeitfunktionen physikalisch mit **Sprüngen des Energieinhalts** der Signale verbunden wären und damit mit  $\infty$  **hohen Leistungsspitzen**, gibt es aus energetischen Gründen solche Signale in dieser strengen Form nicht. Eine Zerlegung realer Signal in (ideale) Rechteckschwingungen erfordert damit dann eine Walsh-Analyse.

Damit die erforderlichen Formeln überschaubar und einfach bleiben und deren Anzahl gering gehalten werden kann, wird zunächst ein Kapitel über **Symmetrien** betrachtet. Es zeigt sich, daß sich mit deren Hilfe der Rechenaufwand im weiteren Verlauf stark reduziert. **Harmonische Signale**, die daran anschließend analysiert werden, sind einerseits sehr anschaulich, und spielen andererseits in der *Meßtechnik* eine wichtige Rolle. Mit Hilfe der harmonischen Signale werden die Begriffe der Phasenverschiebung und der **komplexen Zeiger** veranschaulicht.

Die Zeigerdarstellung dient zur Vereinfachung der Darstellung komplizierter Zusammenhänge. Zunächst werden „rotierende“ **Zeiger** betrachtet, deren Projektionen auf die reelle bzw. imaginäre Achse Cosinus- bzw. Sinus-förmige Zeitverläufe ergeben. Mathematisch läßt sich dies mit Hilfe der **Euler'schen Formeln** beschreiben. Damit wiederum läßt sich die „**negative Frequenz**“ anschaulich definieren. Mittels der negativen Frequenz gelangt man im Frequenzbereich zur *zweiseitigen Darstellung des Spektrums*, die sich anläßlich der Modulation als sehr bequem erweisen wird.

Danach werden die Zeiger als „**feststehend**“ betrachtet, wie man sich das mit Hilfe einer stroboskopischen Beleuchtung der rotierenden Zeiger veranschaulichen kann. Es ist dies die gleiche Darstellung, wie sie von der komplexen Wechselstromrechnung her bekannt ist. Auf diese Weise lassen sich Phasenverschiebungen zwischen harmonischen Signalen bequem darstellen. Phasenverschobene Zeiger lassen sich in ihre **reellen und imaginären Komponenten** aufspalten. Damit ergeben sich reelle und imaginäre, also insgesamt **komplexe Zeitfunktionen**. Diese sind von großer Wichtigkeit für **softwaremäßige Realisierungen** von Systemen mit Hilfe der **Digitalen Signalverarbeitung**.

Obwohl also **imaginär** in diesem Zusammenhang nur bedeutet, daß die betreffende Komponente eine **Phasenverschiebung** von  $90^\circ$  aufweist und ansonsten eine absolut reale Zeitfunktion ist, wird bei der analytischen Berechnung eine imaginäre Funktion angesetzt — genau wie bei der komplexen Wechselstromrechnung. Dies führt dann auf die komplexwertigen Zeitfunktionen.

Dann wird zunächst die **reelle Fourier-Zerlegung** betrachtet und daran anschließend die **komplexe**. Beide Fourier-Zerlegungen werden mit Hilfe von Zeitfunktionen durchgeführt, die in der Nachrichtentechnik sehr typisch sind:

- Dreieckschwingung
- Rechteckschwingung

Am Beispiel der Rechteckschwingung wird gezeigt, wie die Variation der Parameter im Zeitbereich sich auf das Spektrum auswirkt. Dadurch ergeben sich einige elementare Zusammenhänge, die es gestatten, zeichnerisch oder graphisch den Spektralverlauf sehr bequem anzugeben. Diese Methode hat auch noch im Zeitalter der rechnergestützten mathematischen Analyseprogramme (z.B. MATLAB) ihre Berechtigung, denn mit ihr sieht der Ingenieur unmittelbar die **Auswirkung der Änderung eines Parameters auf das Spektrum**. Ganz abgesehen davon ist diese „**graphische Methode**“ auch sehr gut als Kontrolle für Spektren zu gebrauchen, die mittels eines Computerprogrammes berechnet wurden.

# 1 Symmetrien von Zeitfunktionen und Spektren

Dieser Abschnitt, in welchem Symmetrien von Zeitfunktionen und harmonische Signale betrachtet werden, dient der Vereinfachung der Fourier-Analyse. Die Fourier-Analyse<sup>\*1</sup> ist eine mathematische Methode, die es gestattet, periodische Funktionen mit Hilfe von Cos- und Sin-Schwingungen (harmonische Signale) zu beschreiben. Die Fourier-Analyse und als deren Umkehrung die Fourier-Synthese stellt somit die mathematische Beschreibung der idealisierten LC-Filterbank aus Abschnitt 2 in „Frequenz, Spektrum, Resonanz“ dar.

Berechnungen vereinfachen sich immer, wenn man Symmetrien ausnutzen kann. Davon macht man Gebrauch, wenn zur Gewinnung der Ergebnisse ein graphisches Verfahren verwendet werden soll, bei dem die Formeln durch Graphiken veranschaulicht werden.

Im Allgemeinen haben zwar die Zeitfunktionen keine Symmetrien, jedoch lassen sich beliebige Funktionsverläufe in einen geraden oder *spiegel-symmetrischen* (even) und einen ungeraden oder *punkt-symmetrischen* (odd) Teil aufspalten.

## 1.1 Zerlegung in geraden (even: e) und ungeraden (odd: o) Anteil

Man setzt hierfür den Zeitverlauf an zu:

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t) \quad (1.1)$$

Der Index **e** bedeutet **even** (*gerade*); **o** bedeutet **odd** (*ungerade*). Mit den Symmetrie-Eigenschaften

$$\begin{array}{l} f_e(-t) = f_e(t) \quad \text{Spiegel-Symmetrie} \\ f_o(-t) = -f_o(t) \quad \text{Punkt-Symmetrie} \end{array} \quad (1.2)$$

gewinnt man aus Gl. (1.1):

$$f_e(t) = \frac{1}{2}\{f(t) + f(-t)\} \quad \text{gerader Anteil} \quad (1.3)$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2}\{f(t) - f(-t)\} \quad \text{ungerader Anteil} \quad (1.4)$$

Im Falle von (einfachen) nichtperiodischen Funktionen kann man diese Zerlegung bequem graphisch durchführen, Bild 1.1.

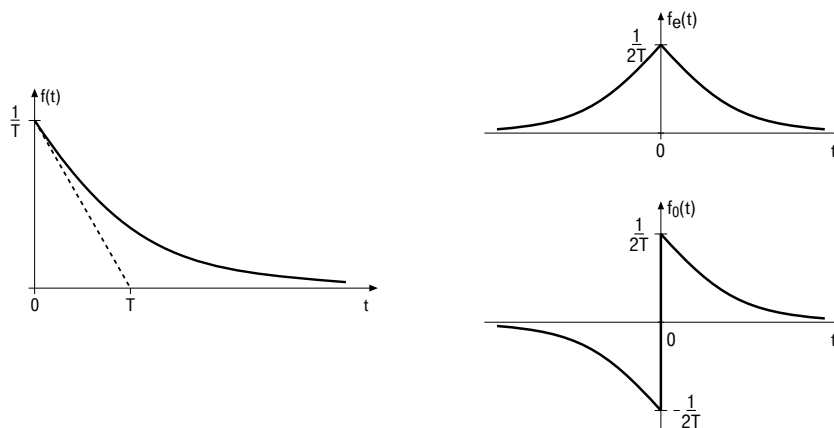


Bild 1.1: Zerlegung einer Funktion in einen geraden und einen ungeraden Anteil

<sup>\*1</sup>Joseph Fourier, französischer Mathematiker, \*21.03.1768 †16.05.1830

Die **Zerlegung** in einen geraden und einen ungeraden Anteil ist hier beispielhaft für eine (reelle) Zeitfunktion gezeigt. Sie gilt aber genau **in gleicher Weise im Frequenzbereich** für Spektren oder Frequenzgänge,<sup>\*2</sup> Bild 1.2.

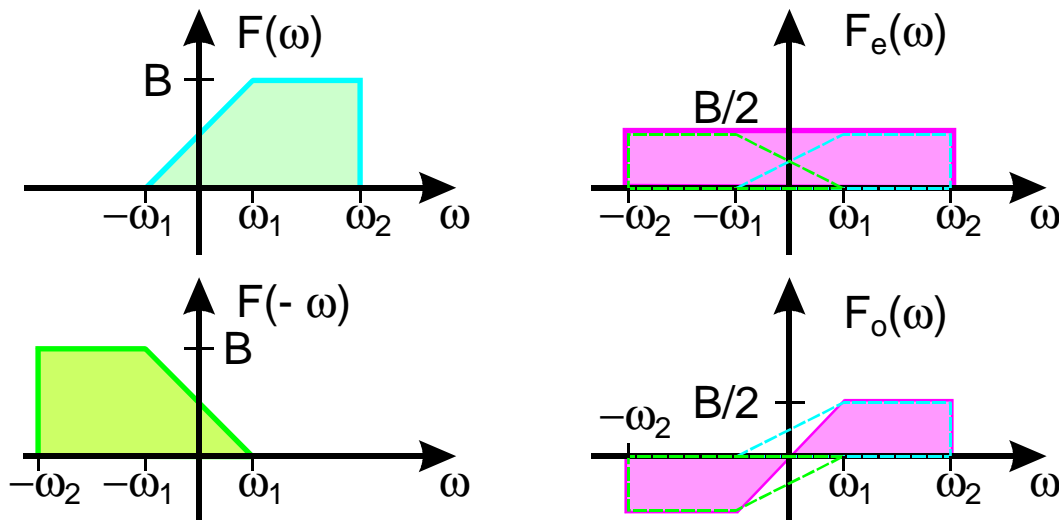


Bild 1.2: Zerlegen eines Spektrums in seinen geraden und ungeraden Anteil

Dieses graphische Verfahren hat den unbestreitbaren Vorteil, daß sich die Ergebnisse sofort kontrollieren lassen:

- Ist der „gerade Teil“ tatsächlich gerade?
- Ist der „ungerade Teil“ tatsächlich ungerade?
- Ergibt die Addition beider Anteile wieder die ursprüngliche Funktion?

Gerade wegen solch bequemer Kontrollmöglichkeiten wird im weiteren Verlauf immer wieder auf eine graphische Interpretation der jeweiligen Formeln zurückgegriffen.

## 2 Harmonische Signale

Die harmonischen Signale  $\sin(\omega t)$  und  $\cos(\omega t)$  spielen bei linearen Systemen eine große Rolle, denn die Eigenschwingungen von linearen Systemen (aus konzentrierten Elementen) sind Cos-förmig<sup>†1</sup>.

Allgemeiner gilt, daß ein **lineares** System bei Cos-förmiger Erregung eine Cos-förmige Antwort hat. Auf dieser Tatsache beruht die gesamte **komplexe Wechselstrom-Rechnung**.

### 2.1 Die phasenverschobene harmonische Schwingung

Bekanntlich läßt sich eine phasenverschobene harmonische Schwingung  $s(t)$  mit Hilfe von einer Sinus- und einer Cosinus-Schwingung darstellen.

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega_0 t + \psi) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.1)$$

Die Zerlegung in einen geraden und in einen ungeraden Anteil geschieht hier am einfachsten mit Hilfe der **Additions-Theoreme**<sup>†2</sup>.

<sup>\*2</sup>Das Beispiel entspricht der beim analogen Fernsehen verwendeten Rest-Seitenband-Modulation.

<sup>†1</sup>Bei stabilen Systemen handelt es sich um abklingende Schwingungen. Wenn nur auf die Kurvenform abgehoben werden soll, könnte man genau so gut Sin-förmig schreiben, denn für die Form spielt die Phasenlage keine Rolle.

<sup>†2</sup>Die Zerlegung gemäß Gl. (1.3), (1.4) gilt auch hier, jedoch bringt in diesem Fall die zeichnerische Anwendung dieser Gleichungen keine Vorteile.

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega_0 t + \psi) = \underbrace{\hat{s} \cdot \sin \psi}_{a} \cdot \cos(\omega_0 t) + \underbrace{\hat{s} \cdot \cos \psi}_{b} \cdot \sin(\omega_0 t) \quad (2.2)$$

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) = \underbrace{\hat{s} \cdot \cos \varphi}_{a} \cdot \cos(\omega_0 t) - \underbrace{\hat{s} \cdot \sin \varphi}_{b} \cdot \sin(\omega_0 t) \quad (2.3)$$

$$= a \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{\text{gerade}} + b \cdot \underbrace{\sin(\omega_0 t)}_{\text{ungerade}} \quad (2.4)$$

Hierbei ist:

$$a = \hat{s} \cdot \sin \psi = \hat{s} \cdot \cos \varphi \quad (2.5)$$

$$b = \hat{s} \cdot \cos \psi = -\hat{s} \cdot \sin \varphi \quad (2.6)$$

$$\hat{s}^2 = a^2 + b^2 \quad (2.7)$$

$$\psi = \arctan(a/b) \quad (2.8)$$

$$\varphi = -\arctan(b/a) \quad (2.9)$$

Bild 2.1 zeigt ein Beispiel für eine solche Zerlegung.

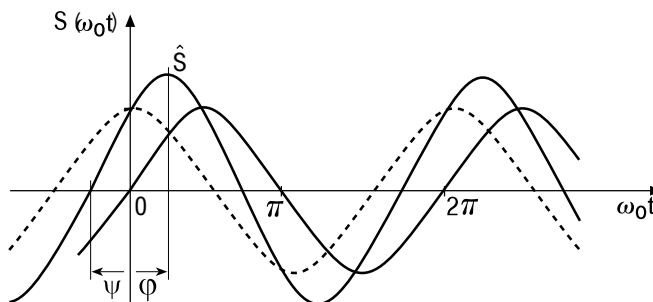


Bild 2.1: Zerlegen einer phasenverschobenen harmonischen Schwingung

Die folgende Tabelle ist eine Hilfe für die Erstellung von Skizzen. Es ist  $\sqrt{1} = 1$ ,  $\sqrt{4} = 2$ . In der gegebenen Darstellung läßt sich die Tabelle jedoch leichter merken.

$\varphi$	0	30	45	60	90
$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos \varphi$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	0

### 2.1.1 Zur Messung der Nichtlinearität mittels harmonischer Signale

In der Praxis kann ein Cos-förmiges Signal zur Messung der Nichtlinearität eines Übertragungssystems dienen. Ist das System nicht linear, ist die Ausgangsspannung auch nicht mehr Cos-förmig. Eine spektrale Zerlegung (Fourier-Zerlegung bzw. meßtechnisch z.B. Messung mit einem Fourier-Analysator) des Ausgangssignals liefert dann Oberschwingungen. Die Leistung, die in diesen Oberschwingungen steckt, dient als Maß für die Nichtlinearität, die in einem solchen Fall mit Hilfe von Klirrfaktoren ausgedrückt wird<sup>†3</sup>.

## 3 Zeigerdarstellung harmonischer Signale

Die harmonischen Schwingungen  $\cos(\omega_0 t)$  und  $\sin(\omega_0 t)$  werden gerne mit Hilfe von Zeigern dargestellt, weil dies auf eine bequeme Berechnungsmöglichkeit mittels der komplexen Rechnung führt.

<sup>†3</sup>Siehe hierzu das Kapitel „LTI: Lineare Zeitinvariante Übertragungssysteme“.

### 3.1 Zeiger I: Rotierende Zeiger und negative Frequenz

Dieser Zusammenhang lässt sich veranschaulichen [4], indem eine *rotierende Scheibe* betrachtet wird, auf der ein Pfeil  $\uparrow$  oder *Zeiger* markiert ist. Wird dieser (rotierende) Pfeil sowohl in Richtung der reellen als auch der imaginären Achse projiziert, so beschreiben die zeitlichen Änderungen der Länge der Projektion eine Cos- bzw. eine Sin-Schwingung. Dies ist der Zusammenhang zwischen der Kreisbewegung bzw. der *komplexen Rechnung* und den Sin- bzw. Cos-Schwingungen bzw. der reellen Rechnung, Bild 3.1. Die Projektion in Richtung der imaginären Achse, d.h. auf die reelle Achse, ergibt dabei die Cos-förmige Schwingung.

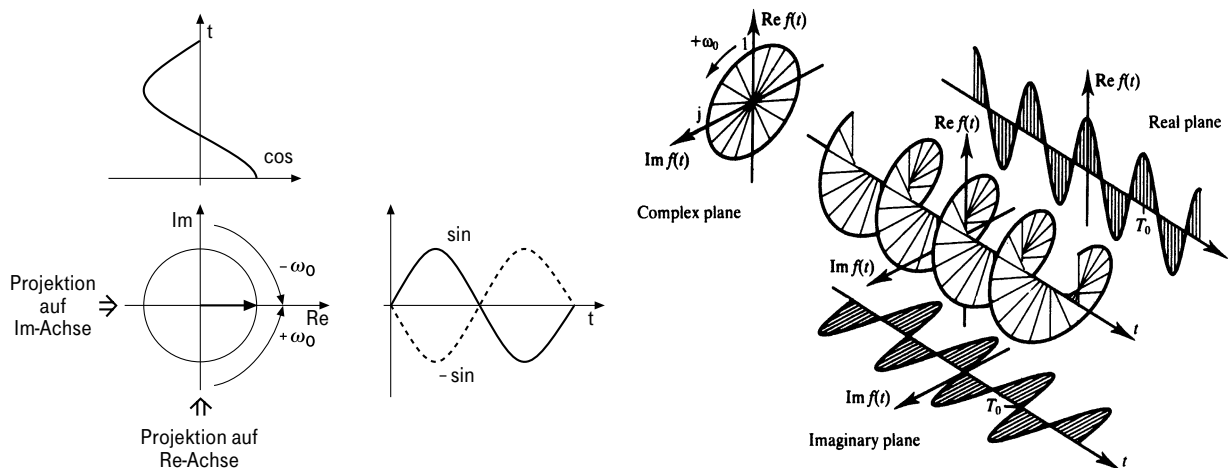


Bild 3.1: Projektion der Kreisbewegung

Der Winkel zwischen den beiden Projektionen ist  $90^\circ$ . Dies entspricht dem Übergang von  $\Re$  (reell) nach  $\Im$  (imaginär) in der komplexen Ebene, d.h. „ $j$ “ bedeutet  $90^\circ$  **Phasendrehung**, wie man auch vom Übergang von der Cos-Schwingung zur Sin-Schwingung erkennt.

Es gibt folgenden Zusammenhang zwischen den Symmetrien im Zeitbereich und den Eigenschaften in der komplexen Ebene:

cos : gerade	$\implies$	$0^\circ$	: reell
sin : ungerade	$\implies$	$90^\circ$	: imaginär

Wird die Drehrichtung umgekehrt, ändert sich nichts bei der geraden Funktion, wohingegen die ungerade Funktion ihr Vorzeichen wechselt, siehe auch Bild 3.1.

Mathematisch wird der Zusammenhang mit der Zeigerdarstellung durch die **Euler'schen Formeln** ausgedrückt (**Euler I**).

$$\begin{aligned} e^{jx} &= \cos x + j \sin x; & x &= \omega_0 t \\ e^{-jx} &= \cos x - j \sin x; & -x &= (-\omega_0)t \end{aligned} \tag{3.1}$$

Umgeformt ergeben sich die bekannten und oft benötigten Beziehungen (**Euler II**):

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} \{ e^{jx} + e^{-jx} \}; & x &= \omega_0 t \\ \sin x &= \frac{1}{2j} \{ e^{jx} - e^{-jx} \}; & -x &= (-\omega_0)t \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die Gleichungen (3.2) lassen sich nun wieder graphisch durch **zwei gegenläufige Zeiger** veranschaulichen, Bild 3.2.

Aus Bild 3.2 sieht man z.B., daß sich eine reelle Größe aus einer komplexen und einer konjugiert komplexen Größe zusammensetzen läßt, entsprechend zu:

$$x = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{(x + jy)}_{\text{komplex}} + \underbrace{(x - jy)}_{\text{konjugiert komplex}} \right\} \tag{3.3}$$

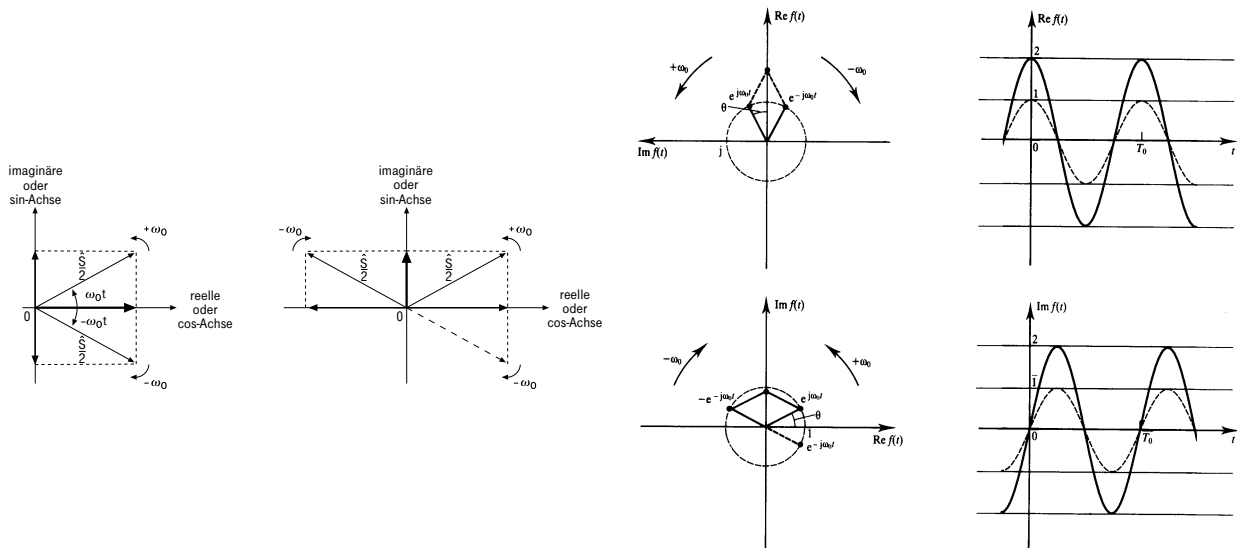


Bild 3.2: Darstellung der Cos- bzw. Sin-Schwingung durch rotierende Zeiger

### 3.1.1 Die Negative Frequenz

Mit Hilfe der Euler-Beziehungen kann man **formal** eine **negative Frequenz** definieren, wie z.B. aus der Darstellung für  $\cos(\omega t)$  hervorgeht. Das Minuszeichen aus der Darstellung nach Euler wird dabei der Frequenz  $\omega$  zugeordnet.

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} \left\{ e^{j\omega t} + e^{j(-\omega)t} \right\} \tag{3.4}$$

Formel	: $e^{j\omega t}$	$e^{j(-\omega)t}$	
Zeiger	: links	rechts	herum drehend
mathematisch	: positiver	negativer	Umlaufsinn
formal	: positive	negative	Frequenz

- **Physikalisch** gibt es **keine negativen Frequenzen**, aber zur *bequemeren Darstellung* mit komplexer Rechnung führt man *formal* eine negative Frequenz ein. Siehe hierzu auch Abschnitt 5.1.1.

Graphisch lässt sich eine negative Frequenz darstellen, indem die Frequenzachse zu negativen Werten verlängert wird. Dies führt dann auf eine zweiseitige — und damit *symmetrische* — Darstellung im Frequenzbereich, Bild 3.3.

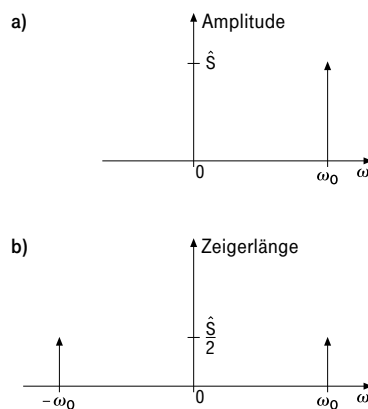


Bild 3.3: Spektrum einer harmonischen Schwingung in ein- und zweiseitiger Darstellung

Bei der einseitigen Darstellung wird im Spektrum die Amplitude der Schwingung aufgetragen, während bei der zweiseitigen Darstellung die Zeigerlängen (= Amplitude/2) aufgetragen werden. Der Vorteil der zweiseitigen Darstellung wird sich z.B. bei der Behandlung der Fourier-Zerlegung oder der Modulation erweisen.

### 3.2 Zeiger II: Feststehende Zeiger mit Phasenverschiebung

Aus den kreisförmig rotierenden Zeigern werden quasi feststehende Zeiger, wenn man sich die „rotierende Scheibe“ *stroboskopisch* einmal pro Umdrehung angeblitzt vorstellt. Die Phasenverschiebung zwischen zwei cos-förmigen Zeitfunktionen wird dabei zum Phasenwinkel zwischen den beiden Zeigern.

Werden die Zeiger in ihre Komponenten in Richtung der reellen Achse (oder  $I$ -Achse) und der imaginären Achse (oder  $Q$ -Achse) aufgespalten, also in Richtung  $0^0$  und  $90^0$ , kommt man zur komplexen Darstellung wie sie auch in der komplexen Wechselstromrechnung üblich ist. Die  $0^0$  Komponente wird übertragungstechnisch mit  $I$  (*in phase*) und die  $90^0$  Komponente mit  $Q$  (*quadrature phase*) bezeichnet, Bild 3.4.

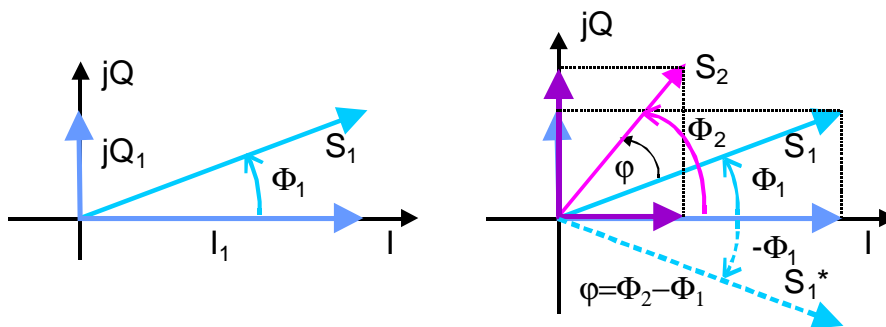


Bild 3.4: Komplexe Zeiger mit Phasenverschiebung und Aufspaltung in ihre  $I$  und  $Q$  Anteile

Die Phasenverschiebung zwischen den beiden komplexen Größen  $S_1$  und  $S_2$  (rechts in Bild 3.4) ist:

$$\varphi = \Phi_2 - \Phi_1$$

Wird das Produkt von  $S_1$  und  $S_2$  gebildet, interessiert nur dieser Winkel  $\varphi$ .

$$S_1 \cdot S_2 = |S_1| \cdot |S_2| e^{j(\Phi_1 + \Phi_2)} \quad (3.5)$$

$$S_1^* \cdot S_2 = |S_1| \cdot |S_2| e^{j(\Phi_2 - \Phi_1)} = |S_1| \cdot |S_2| e^{j\varphi} \quad (3.6)$$

Wie aus Gleichung (3.6) zu erkennen ist, muß daher der **konjugiert komplexe** Wert  $S_1^*$  gewählt werden, damit sich der richtige Differenz-Winkel  $\varphi$  ergibt. (Dies ist wie bei der Berechnung einer Wirk-Leistung.)

In der komplexen Wechselstromrechnung haben die Zeiger feste Längen, entsprechend zu den Amplituden der jeweiligen harmonischen Schwingungen. In der Übertragungstechnik dürfen sich die Längen ändern, weil mit Hilfe dieser Änderungen Informationen oder Nachrichten übertragen werden. Man hat damit  $I(t)$  und  $Q(t)$ , woraus sich dann komplexwertige Zeitfunktionen  $z(t) = I(t) + jQ(t)$  ergeben.

#### 3.2.1 I/Q Übertragung digitaler Signale

Ein übertragungstechnisch wichtiger Spezialfall besteht darin, daß zwei Zeitfunktionen gebildet werden, von denen die eine nur aus einer  $I(t)$  Komponente und die andere nur aus einer  $Q(t)$  Komponente besteht. Da diese beiden Komponenten orthogonal zu einander sind, lassen sie sich (empfangsseitig) wieder trennen. Hiervon macht man bei der Übertragung digitaler Signale Gebrauch, Bild 3.5. Mit diesem „Trick“ läßt sich die übertragene Datenrate bei gleicher Kanal-Bandbreite verdoppeln.

**Im Übertragungs-Kanal werden hierfür Bandpaß-Signale verwendet, die in ihrer Amplitude  $A(t)$  und ihrer Phase  $\varphi(t)$  moduliert sind.** Für das Amplituden- und das Phasen-Signal ergeben sich:



## Transmitter's Side                      Receiver's Side

### 2 Transmission Paths: I & Q

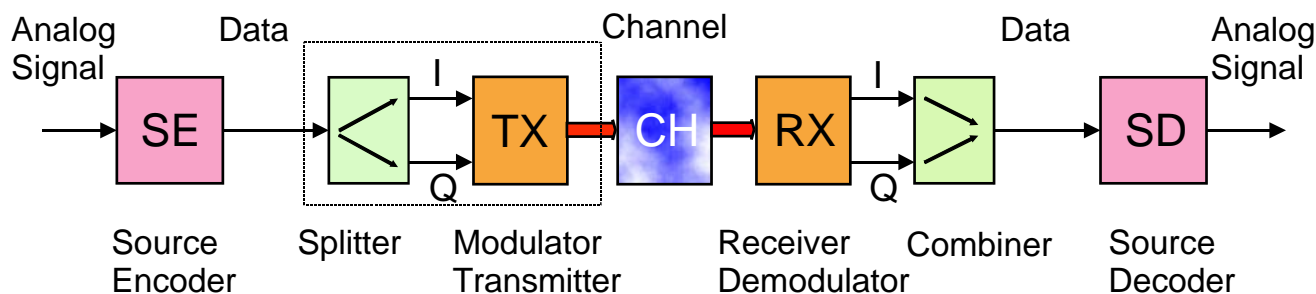


Bild 3.5: I/Q Übertragung digitaler Signale

$$A(t) = \sqrt{I(t)^2 + Q(t)^2} \quad \textbf{Amplituden-Signal} \quad (3.7)$$

$$\varphi(t) = -\arctan\left(\frac{Q(t)}{I(t)}\right) \quad \textbf{Phasen-Signal} \quad (3.8)$$

Aufgrund dieser sehr wichtigen Anwendung ist es notwendig, komplexwertige Zeitfunktionen zu analysieren (und in der Digitalen Signalverarbeitung zu implementieren).

## 4 Die Reelle Fourierzerlegung

Mit Hilfe der Fourier-Analyse lassen sich beliebige periodische Funktionen durch Cos- und Sin-Dauerschwingungen in dem Sinne approximieren, daß das **mittlere Fehlerquadrat ein Minimum** wird. Es ist dies ein Spezialfall der Entwicklung nach orthogonalen Funktionen. Diese Einschränkung hat zur Folge, daß an Sprungstellen der Funktion nach der Synthese Überschwinger entstehen (Gibbs' sches Phänomen)<sup>§1</sup>.

Für die reelle Fourierzerlegung gilt der Ansatz, der die Zeitfunktion  $f(t)$  im Mittel annähert:

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n \cdot \cos(n\omega_0 t)}_{\text{gerade in } t} + \underbrace{b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)}_{\text{ungerade in } t} \xrightarrow{\text{l.i.m}} f(t); \quad \omega_0 = 2\pi/T \quad (4.1)$$

$T$  ist die Periodendauer der Zeitfunktion und  $\omega_0 = 2\pi/T$  ist der **Linien-Abstand im Spektrum**.

$a_n$  und  $b_n$  sind formal die Fourier Koeffizienten. **Physikalisch interpretiert** sind es die **Amplituden** der Cos- bzw. Sin-Dauerschwingungen. Man beachte auch hier den geraden und den ungeraden Anteil.

Diese Fourier-Koeffizienten berechnet man mit den Integralen:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt; \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Diese beiden Integrale sind das Ergebnis der Minimierung des quadratischen Fehlers zwischen  $f(t)$  und  $\tilde{f}(t)$  und stellen genau betrachtet Orthogonalitätsbedingungen dar, wie sie im Umdruck „Frequenz, Spektrum, Resonanz“ vorgestellt wurden.

<sup>§1</sup>Für das Gibbs'sche Phänomen wird sich anlässlich der Fourier-Transformation eine anschauliche Erklärung finden. (A.-FT, Kap. 4)

Vereinfachend wird im Weiteren  $f(t) = \text{l.i.m. } \tilde{f}(t)$  gesetzt.

An einer Sprungstelle (Unstetigkeitsstelle)  $t_0$  ergibt sich ein Funktionswert aus dem arithmetischen Mittelwert der links- und rechtsseitigen Grenzwerte  $f(t_{0-})$  und  $f(t_{0+})$ .

$$f(t) = \frac{1}{2} \{f(t_{0-}) + f(t_{0+})\} \tag{4.4}$$

Faßt man die Cos- und Sin- Terme der einzelnen Frequenzen zusammen, so folgt

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \tag{4.5}$$

mit

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{Betrags-Spektrum, Amplituden-Spektrum} \tag{4.6}$$

$$\varphi_n = -\arctan(b_n/a_n) \quad \text{Phasen-Spektrum} \tag{4.7}$$

Die Gleichungen (4.6) & (4.7), die formal eine Transformation von kartesischen zu polaren Koordinaten darstellen, können physikalisch mit Hilfe der Filterbank interpretiert werden. Es sind:

- $A_n$  : Amplitude
- $\varphi_n$  : Phase

der Schwingung des betreffenden Schwingkreises der LC-Filterbank, Bild 4.1.

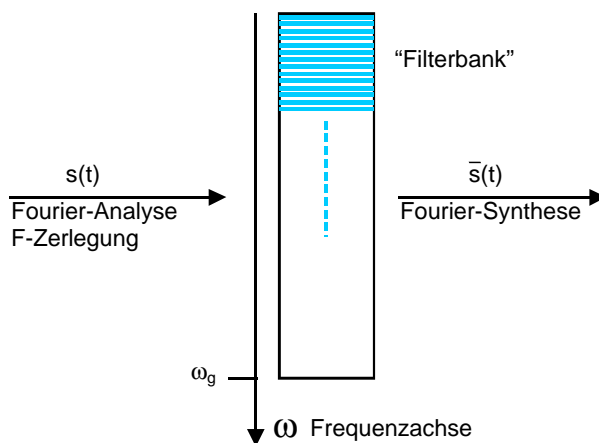


Bild 4.1: Fourier-Analyse und -Synthese veranschaulicht mittels der „Filterbank“.  $\tilde{s}(t)$  ist die „synthetisierte“ Zeitfunktion. Sie enthält keine spektralen Anteile mit  $\omega > \omega_g$ .

Trägt man  $A_n$  und  $\varphi_n$  über der Frequenz  $\omega$  auf, erhält man einen Graphen des Betrags- bzw. Amplituden- und des Phasen-Spektrums der Zeitfunktion  $f(t)$ . Die  $\omega$ -Achse läuft dabei von 0 bis  $\infty$ . Dies ist eine **einseitige Darstellung** im Frequenzbereich.

### 4.1 Beispiel zur rellen Fourier-Analyse: Sägezahnsschwingung

Dieses Beispiel zeigt zum einen exemplarisch die Vorgehensweise bei der Anwendung der F-Analyse, zum anderen werden charakteristische Eigenschaften der F-Zerlegung herausgearbeitet. Indem so die Analyseschritte separiert werden, gewinnt man tiefere Einsichten in die Zusammenhänge. Dies vereinfacht und verallgemeinert schlußendlich den Analyseprozeß. Damit erleichtert es die Anwendung auf andere (Zeit-) Funktionen.

Bild 4.2 zeigt eine Sägezahnsschwingung, wie sie technisch z.B. als x-Ablenkspannung in einem Oszillographen vorkommt. Aber auch die Stimmbänder erzeugen bei der Bildung von Vokalen dergestaltige Laute,

die dann mittels des Mund- und Rachenraumes so gefiltert werden, daß daraus die Vokale entstehen. Die Zeitfunktion *Sägezahnschwingung* enthält also Sin-förmige Schwingungen verschiedener Frequenz, die sich praktisch herausfiltern und mathematisch gemäß Fourier analysieren lassen.

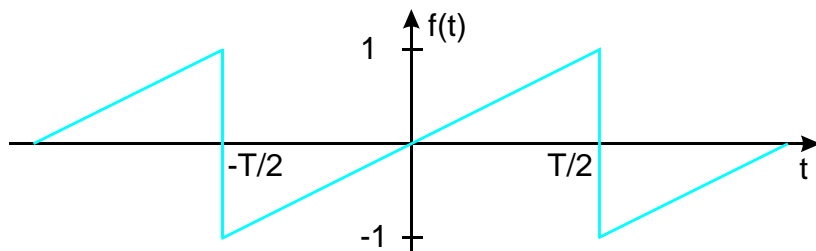


Bild 4.2: Die Sägezahnschwingung im Zeitbereich

Bei der Durchführung einer Fourier-Analyse geht man nach folgendem Schema vor:

1. Aufstellen der Gleichung im Grundintervall:

$$f(t) = \frac{2}{T} \cdot t; \quad -T/2 < t < T/2; \quad f(t \pm T) = f(t); \quad \omega_0 = 2\pi/T \quad (4.8)$$

2. Symmetrien der Funktion:

$$f(-t) = -f(t); \quad \text{ungerade} \implies a_n = 0 \quad (4.9)$$

Da alle  $a$ -Koeffizienten null sind, setzt sich die Sägezahnschwingung nur aus Sin-Schwingungen zusammen<sup>§2</sup>.

3. Berechnung der Koeffizienten:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2}{T} \cdot t \cdot \sin(n\omega_0 t) dt \quad (4.10)$$

$$= \frac{4}{T^2} \underbrace{\left[ \frac{-t \cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{n\omega_0} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt}_{\text{Partielle Integration}} = \frac{-2 \cos(n\pi)}{n\pi} \quad (4.11)$$

4. Ergebnis der Analyse:

$$b_n = \begin{cases} \frac{+2}{n\pi}; & n \text{ ungerade} \\ \frac{-2}{n\pi}; & n \text{ gerade} \end{cases} \quad (4.12)$$

5. Graphische Darstellung der Analyse: **Spektrum** oder Spektralverteilung, Bild 4.3.

Da die Analyse nur eine Sorte von Koeffizienten ergeben hat (hier  $b$ -Koeffizienten), können diese in einem einzigen Diagramm aufgetragen werden. Hierbei bedeuten:

**positive  $b$ -Koeffizienten:** + Sin-Schwingung

**negative  $b$ -Koeffizienten:** - Sin-Schwingung

<sup>§2</sup>Wenn man richtig rechnet, ergeben sich die  $a$  Koeffizienten selbstverständlich zu 0. Es ist allerdings bequemer eine Symmetriebeachtung durchzuführen.

Die in Bild 4.3 gestrichelt eingetragene Hyperbel  $\sim \frac{1}{\omega}$  ist eine „Pseudo-Hüllkurve“ an die Spektralverteilung.

6. Synthese der Zeitfunktion

Die Synthese ergibt hier die Zusammensetzung der Sägezahnfunktion aus sinusförmigen Dauerschwingungen.

$$\tilde{f}(t) = \frac{2}{\pi} \left\{ \sin(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) - + \dots \right\} \tag{4.13}$$

7. Graph der aus der Synthese gewonnenen Zeitfunktion, Bild 4.4.

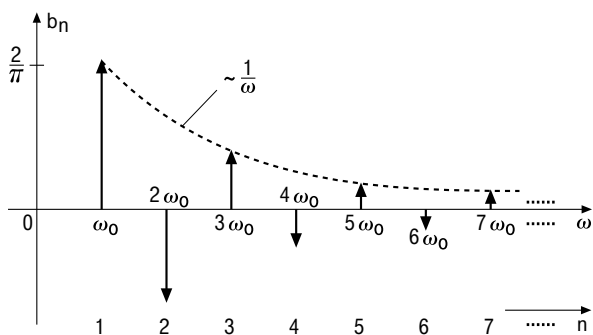


Bild 4.3: Die Sägezahnfunktion im Frequenzbereich

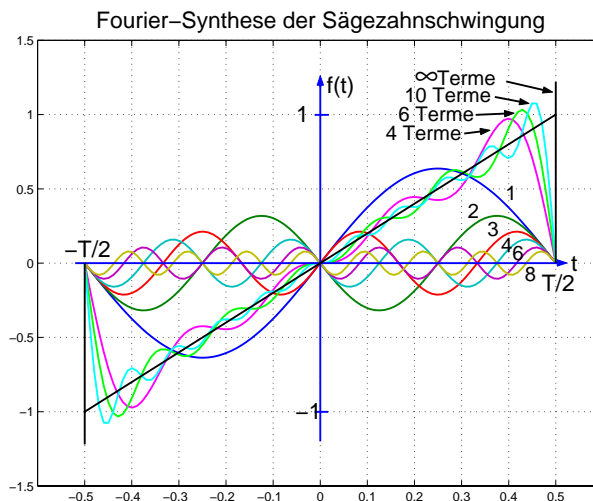


Bild 4.4: Synthese der Sägezahnfunktion aus Sinus-Schwingungen

Das Bild der synthetisierten Zeitfunktion zeigt die beiden der Fourier-Analyse eigenen Besonderheiten:

**Arithmetischer Mittelwert:** Die Synthese-Kurven gehen durch den Punkt, der sich aus dem arithmetischen Mittel zwischen links- und rechtsseitigem Grenzwert ergibt.

**Gibbs'sches Phänomen:** Aufgrund der dem Fourier-Ansatz zugrunde liegenden quadratischen Näherung erhält die Synthese-Kurve **Überschwinger (Gibbs'sches Phänomen)** deren (relative) Größe unabhängig von der Anzahl der verwendeten Koeffizienten ist.

Bei der Synthesekurve des Rechteck-Pulses (Kapitel 5.1) haben die Überschwinger eine gleiche Größe, unabhängig von der Anzahl der überlagerten Teilschwingungen.

## 5 Die Komplexe Fourier-Zerlegung

Die komplexe Fourier-Zerlegung ist diejenige, die im weiteren Verlauf benutzt werden soll. Sie führt auf eine Darstellung bei der die Kreisfrequenz  $\omega$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  läuft. Damit erhält man die zweiseitige Darstellung im Frequenzbereich, bei welcher sich Symmetrien ausnutzen lassen.

Der Übergang von der reellen zur komplexen Fourier-Zerlegung erfolgt mit Hilfe der **Euler'schen Formeln** Gleichung (3.2) auf Seite 5.

Hierbei werden in Gleichung (4.1) die Ausdrücke  $\cos(\dots)$  und  $\sin(\dots)$  jeweils mit  $e^{j\dots}$  bzw.  $e^{-j\dots}$  ausgedrückt.

Läßt man die Summe von  $-\infty$  bis  $+\infty$  laufen, können die Terme mit  $e^{+j\omega t}$  bzw.  $e^{-j\omega t}$  zusammengefaßt werden, woraus eine geschlossene Darstellung folgt.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad \text{komplexer Ansatz} \quad (5.1)$$

$$\omega_0 = 2\pi/T \quad \text{Linienabstand im Spektrum} \quad (5.2)$$

$T$  Periodendauer der Schwingung

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \text{komplexe Fourier-Koeffizienten} \quad (5.3)$$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad \text{Zusammenhang mit reellen F-Koeffizienten} \quad (5.4)$$

Da die Fourier-Koeffizienten  $C_n$  komplex sind, sind in ihnen sowohl die Amplituden  $|C_n|$  als auch die Phasen  $\angle C_n$  der Teilschwingungen enthalten<sup>¶1</sup>.

$$2 \cdot |C_n| = A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{Amplituden-Spektrum} \quad (5.5)$$

$$\angle C_n = \varphi_n = -\arctan(b_n/a_n) \quad \text{Phasen-Spektrum} \quad (5.6)$$

Trägt man die Koeffizienten  $C_n$  direkt über der Frequenz  $\omega$  auf ( $\omega$  geht hier von  $-\infty$  bis  $+\infty$ ) so kommt man nur dann zu einer zeichnerisch einfachen Lösung, wenn diese Koeffizienten entweder rein reell (die Zerlegung also nur aus Cos-Schwingungen besteht) oder rein imaginär sind (die Zerlegung also nur aus Sin-Schwingungen besteht).

In allen anderen Fällen entsteht eine *dreidimensionale* Darstellung, so daß man dann meist besser die Amplituden  $A_n$  (stets  $\geq 0$ ) und die Phasen  $\varphi_n$  aufträgt.

## 5.1 Beispiel zur komplexen F-Zerlegung: Rechteck-Puls

Der Rechteck-Puls, der auch als „Rechteck-Impuls-Zug“ oder als „periodische Rechteckschwingung“ bezeichnet werden kann, Bild 5.1, wird mit der komplexen Zerlegung analysiert. Der Rechteck-Puls kommt in der Technik häufig vor, z.B. in der digitalen Signalverarbeitung oder bei den Modulationen. In dem gewählten Beispiel ist die Pulshöhe  $A$ , die Pulsbreite ist  $\tau$ , die Periodendauer ist  $T$ .

Die folgenden Zusammenhänge macht man sich besser mit Hilfe der **Begriffe** (*Pulshöhe, Pulsbreite, Periodendauer usw.*) als durch die Formelzeichen ( $A, \tau, T$ ) klar! Die verwendeten Formelzeichen können je nach Problemstellung unterschiedlich sein. Begriffe sind „portabel“, dagegen sind Formelzeichen „lokal“, was zu Fehlinterpretationen führen kann.

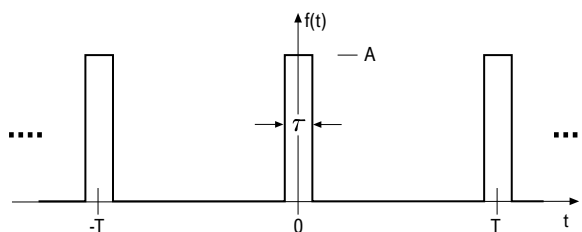


Bild 5.1: Rechteck-Puls (periodische Rechteckschwingung)

Die Achsen in Bild 5.1 sind so gewählt, daß sich eine *Spiegel-Symmetrie* bezüglich der Zeitachse ergibt. Dadurch wird der Rechteck-Puls eine *gerade Funktion* in der Zeit. Die Zeitfunktion des Rechteck-Pulses ist dann:

<sup>¶1</sup>Das Integral zur Berechnung von  $C_n$  ist wieder eine Orthogonalitätsrelation, die man physikalisch als Ergebnis einer Resonanz interpretieren kann. Ein Beispiel dazu ist die Feldstärkeanzeige (entsprechend zu  $|C_n|$ ) eines Rundfunkempfängers, der aus der Überlagerung sämtlicher empfangbaren „HF-Träger“ einen Sender herausfiltert.

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{für } |t| \leq \tau/2 = A \cdot \Pi_{\tau/2} \\ 0 & \text{für } \tau/2 < |t| < T/2 \end{cases} \quad f(t \pm nT) = f(t) \quad (5.7)$$

Die **Bezeichnung für einen Rechteck-Impuls** ist dabei zu  $\Pi_{\tau/2}$  gewählt. Der Index  $\tau/2$  kennzeichnet die **halbe Breite** des  $\Pi$ -Impulses. Genau der gleiche Ausdruck  $\tau/2$  tritt anschliessend in der Formel für sein Spektrum wieder auf, siehe Gleichungen (5.9) und (5.12) <sup>¶2</sup>.

Die Berechnung der Koeffizienten ergibt:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left\{ \frac{-A}{jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \right\} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{T} \frac{e^{jn\omega_0 \tau/2} - e^{-jn\omega_0 \tau/2}}{jn\omega_0} \quad (5.8)$$

$$\leadsto C_n = A \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 \tau/2)}{n\omega_0 \tau/2} \quad (5.9)$$

In Gleichung (5.9) tritt die häufig gebrauchte Form des **six** auf.

$$\text{six} = (\sin x)/x = \frac{\sin(x)}{x} \quad x = n\omega_0 \tau/2 \quad (5.10)$$

Die Koeffizienten  $C_n$  sind reell, was bedeutet, daß die Zerlegung dieses Rechteck-Pulses nur Cos-Schwingungen liefert. Mit Hilfe der Symmetrie-Überlegung findet man diese Aussage auch ohne Durchführung der F-Analyse sofort.

Die graphische Darstellung der Spektralverteilung kann demzufolge in einem (einigen) Bild erfolgen. Nach den vorausgegangenen Überlegungen wird der **Realanteil des Spektrums** dargestellt, der **sowohl positive als auch negative Werte** annehmen kann, Bild 5.2.

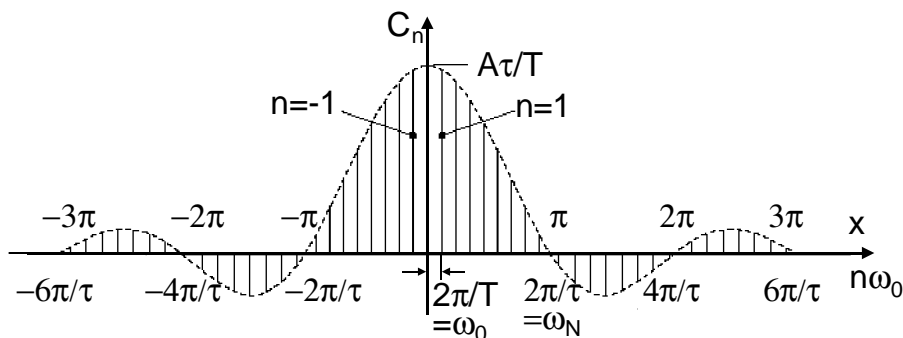


Bild 5.2: Spektrum des Rechteck-Puls-Zuges (zweiseitige Darstellung); Der Linienabstand ist  $\omega_0 = 2\pi/T$

Aus der Konstruktion des Spektrums sind folgende **allgemeingültige Zusammenhänge** zu erkennen:

1. **Das Spektrum besteht aus einzelnen Linien mit gleichen Abständen** (äquidistant). Der Linienabstand ist  $2\pi/\text{Periodendauer}$ . ( $\omega_0 = 2\pi/T$ )  
 Wenn die **Zeitfunktion periodisch** ist, ergibt sich immer ein **Spektrum**, das aus **äquidistanten Linien** besteht.
2. Der **Linien-Abstand**  $\omega_0 = 2\pi/T$  ist **reziprok zur Periodendauer**  $T$ .

$$\text{Linien-Abstand} = \frac{2\pi}{\text{Periodendauer}} \quad (5.11)$$

Diese reziproke Gesetzmäßigkeit ist ein Spezialfall des **Zeit-Bandbreiten-Gesetzes**.

<sup>¶2</sup>Dies ist wichtig für die graphische Behandlung der Gewinnung einer Spektralverteilung, weil dadurch für diesen praktisch wichtigen Fall ein einfacher Zusammenhang zwischen der Graphik und der Formel entsteht.

3. Die Größe der Linien kann — in Abhängigkeit von der Ordnung  $n$  — mit Hilfe einer **Hüllkurve** beschrieben werden.

Die **Hüllkurve des Spektrums** ergibt sich aus der **Form der primitiven Periode der Zeitfunktion**, siehe Gleichung (5.9). Für rechteckförmige Pulsform also:

$$\boxed{\square_{\tau/2}(t) \circ\text{---}\bullet \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}} \tag{5.12}$$

Das Symbol  $\circ\text{---}\bullet$  wird zur Kenntlichmachung von Korrespondenzen benutzt. Die Seite mit dem Kreis ist immer dort, wo die Zeitfunktion steht. Entsprechend kann daher auch  $\bullet\text{---}\circ$  vorkommen, wenn die Zeitfunktion auf der rechten Seite steht.

4. Die **Lage der 1. Nullstelle der  $\sin$ -Hüllkurve** ist bei  $\omega_N = 2\pi/\tau$  und damit **reziprok zur Breite  $\tau$**  eines Impulses.
5. Die **Größe der Linie bei der Frequenz  $\omega = 0$**  entspricht dem **Gleichanteil der Zeitfunktion**. Beim Rechteck ist das:<sup>13</sup>

$$\boxed{C_0 = \frac{A \cdot \tau}{T}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Linie bei } (\omega = 0) \Rightarrow \text{Gleichanteil} = \frac{\text{Impulshöhe} \cdot \text{Impulsbreite}}{\text{Periodendauer}}} \tag{5.13}$$

Die **F-Synthese** für die Werte Periode/Pulsbreite = 6 liefert für  $N = 10$  und  $A = 1$ :

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-N}^{+N} C_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \tag{5.14}$$

Diese Synthese-Kurve zeigt Bild 5.3. Sehr deutlich sind die **Überschwinger** zu sehen. Die Amplitude dieser **Überschwinger** ist unabhängig von der Anzahl  $N$  der zur Synthese verwendeten Terme, ein Effekt, der als **Gibbs'sches Phänomen** bezeichnet wird. (Siehe Anwendungen der F-Transformation, Kap. 4)

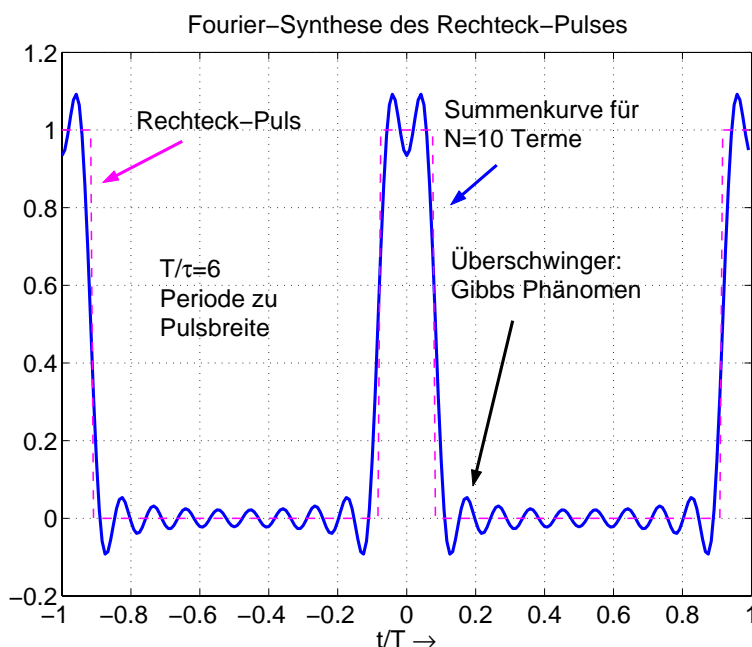


Bild 5.3: Fourier-Synthese des Rechteck-Pulses mit Periode/Pulsbreite = 6

<sup>13</sup>Dies ist ein typisches Beispiel für einen Zusammenhang, den man sich in **Begriffen** und nicht in Formelzeichen merken sollte.

**Beliebiges Puls-Pausen-Verhältnis:** Bei Beachtung der oben genannten Zusammenhänge kann man sofort die Spektralverteilung eines Rechteck-Pulses mit beliebigem Puls/Pause-Verhältnis angeben, da man die Einflüsse der einzelnen Parameter auf die Spektralverteilung direkt erkennt.

**Tastgrad:** Der Tastgrad  $\theta$  ist das Verhältnis von Impuls-Breite zu Periode. (alternativ zum Puls-Pausen-Verhältnis)

$$\text{Tastgrad} \quad \theta = \frac{\text{Impulsbreite}}{\text{Periode}} = \frac{\tau}{T} \tag{5.15}$$

**Puls/Pause = 1 bzw. Tastgrad = 1/2:** Ein besonders wichtiger Spezialfall ist Puls/Pause = 1. Hierfür ist der Tastgrad  $\theta = 1/2$ . Dieser Fall tritt bei der **Modulation** auf. Weil die Periodendauer  $T$  doppelt so groß ist wie die Impulsbreite  $\tau$ , fällt eine **Nullstelle der Hüllkurve auf jede 2. Linie**, welche damit verschwinden. Es gibt also hier nur **ungeradzahlig**e Vielfache der Grundschwingung  $\omega_0$ , also  $(2n + 1) \cdot \omega_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$ .

### 5.1.1 Interpretation der Spektrallinien als rotierende Zeiger

Bild 5.4 ist eine 3-dimensionale Darstellung der F-Zerlegung [4] und der F-Synthese einer Rechteckschwingung mit Puls/Pause = 1 bzw. Tastgrad = 1/2. Die hierbei gewählte Darstellung erlaubt eine weitere Interpretation des Fourier-Spektrums. **Das Fourier-Spektrum wird hierbei als momentane ( $t = 0$ ) stroboskopische Aufnahme von rotierenden Zeigern aufgefaßt**, entsprechend zu Bild 3.2 (Seite 6). Danach sind die Spektrallinien bei positiven Frequenzen Zeiger, die sich in mathematisch positiver Richtung drehen, während die Spektrallinien bei negativen Frequenzen als Zeiger interpretiert werden können, die sich mathematisch in negativer Richtung drehen. Betrachtet man die Projektionen dieser Zeiger auf die reelle Ebene als Zeitverläufe, so ergeben sich jeweils Cos-Schwingungen mit den entsprechenden Frequenzen gemäß der Fourier-Zerlegung, entsprechend zu Bild 3.1 (Seite 5). Die Amplituden der resultierenden (Teil-)Schwingungen sind jeweils doppelt so groß wie die Längen der (Einzel-) Zeiger, entsprechend zu Bild 3.2. Eine Ausnahme bildet nur der Gleichanteil, weil es hierfür nur einen Term gibt.

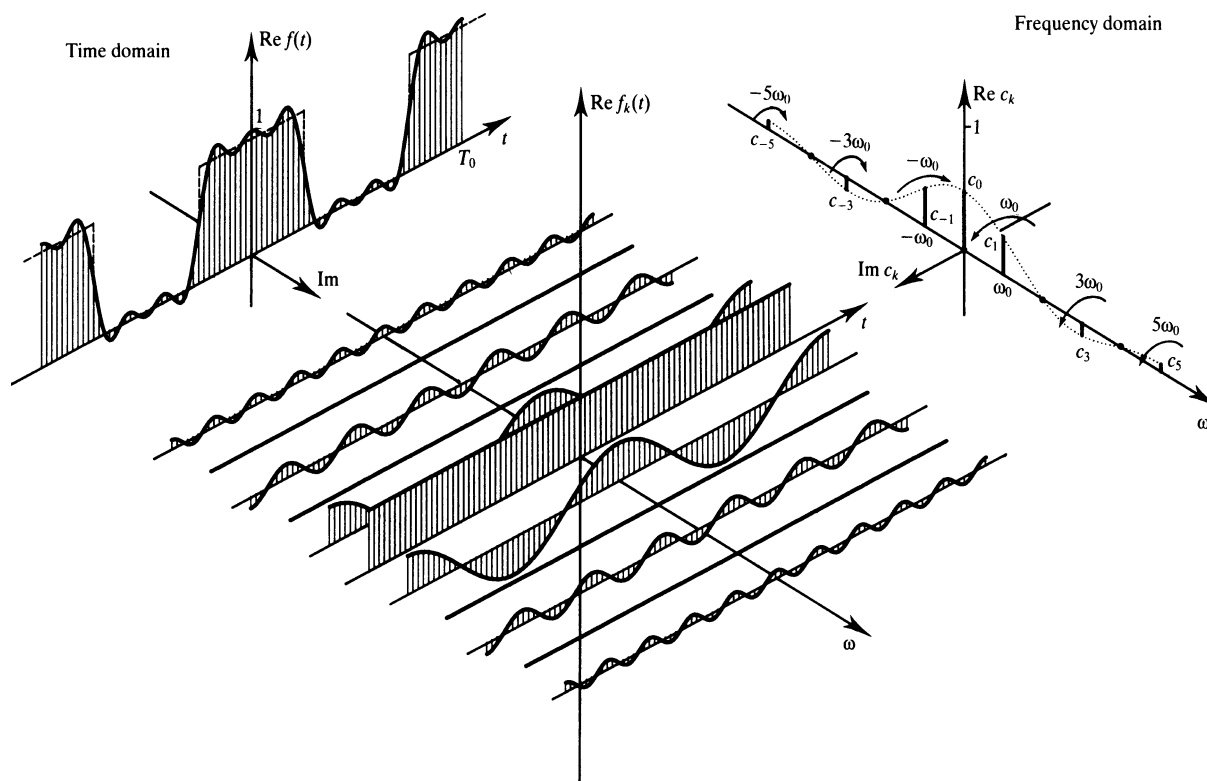


Bild 5.4: Fourieranalyse und -Synthese des Rechteck-Pulses mit Periode/Pulsbreite = 2 und Interpretation des Fourier-Spektrums als Momentanaufnahme rotierender Zeiger



## 6 Die si-Funktion

Da in der Technik häufig Rechteck-Impulse vorkommen, ist die im Spektrum auftretende si-Funktion  $si_x$  besonders wichtig. Insbesondere wird sich die graphische Methode zur Bestimmung der Spektralverteilung praktisch immer in irgend einer Form auf die Korrespondenz  $\square \leftrightarrow \bullet$   $si_x$  beziehen, Gleichung (5.12).

Als Rechteckimpuls wird hierzu eine auf 1 normierte Form<sup>1</sup> betrachtet, d.h. Höhe  $A = 1$  und Breite  $\tau = 1$ , damit Fläche unter dem Impuls = 1.

Die (normierte)  $si_x$  Funktion erhält damit folgende Eigenschaften.

1.  $\frac{\sin(x)}{x}$  hat äquidistante Nullstellen (entsprechend dem Sin), also bei  $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$
2. Die Amplitude der Nebenmaxima ist proportional zu  $1/x$  (Hyperbel), d.h. -20 dB/Dekade im logarithmischen Maßstab<sup>2</sup>.
3. Der Wert bei  $x = 0$  ergibt sich zu:

$$\boxed{si(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \quad \text{Bernoulli-L'Hospital}} \tag{6.1}$$

Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn der sin in eine Reihe entwickelt wird.

$$si(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots}{x} = 1 \tag{6.2}$$

Für  $x \rightarrow 0$  können zunächst die höheren Potenzen von  $x$  vernachlässigt werden, so daß im Grenzfall nur noch  $x/x = 1$  übrig bleibt.

4. Der Wert bei  $x = \pi/2$ , d.h. in der **Mitte zwischen Maximum und 1. Nullstelle** wird, Bild 6.1:

$$\boxed{si(\pi/2) = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = 2/\pi \approx 0,6366 ; \text{ d.h. } -3,9 \text{ dB}} \tag{6.3}$$

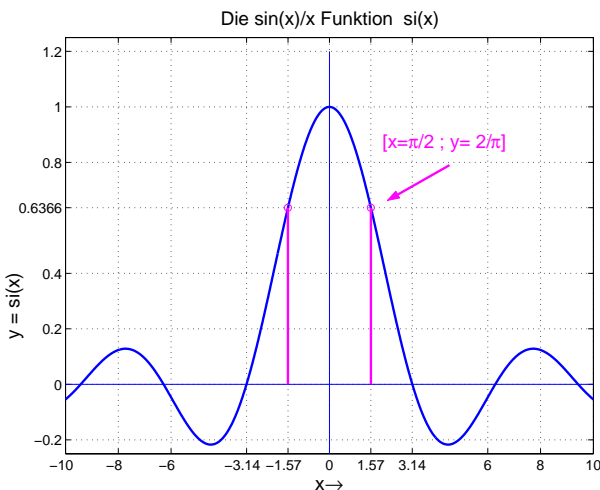


Bild 6.1: Die  $si_x$  Funktion in normierter Darstellung mit den Punkten  $[\pm \frac{\pi}{2} / \frac{2}{\pi}]$

<sup>1</sup>Die Normierung bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, da mittels der zuvor angegebenen Zusammenhänge eine Entnormierung problemlos möglich ist.

<sup>2</sup>In der Technik werden Größenverhältnisse z.B.  $|B/A|$  i.a. im logarithmischen Maßstab angegeben und dann mit **Pegel**  $p$  bezeichnet.  $20 \lg |B/A| = p$ . Die dimensionslose Größe  $p$  erhält dabei eine **Pseudo-Einheit**: Dezi-Bel  $dB$ , also  $p \text{ dB}$ .

### 6.1 Die Tangenten in den Nulldurchgängen der $si\ x$ Funktion

Für die  $si\ x$  -Funktion und deren Ableitung gilt:

$$y(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\dot{y}(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} \tag{6.4}$$

$$\dot{y}(n\pi) = \frac{(-1)^n}{n\pi} \tag{6.5}$$

Hier wurde die  $si\ x$  Funktion bis  $x = 23$  gezeichnet und die Tangenten bis zur 7. Nullstelle eingetragen, Bild 6.2. Zusammen mit den Hüllkurven an die  $si\ x$  Funktion ergibt sich so auch eine recht saubere Freihand-Skizze.

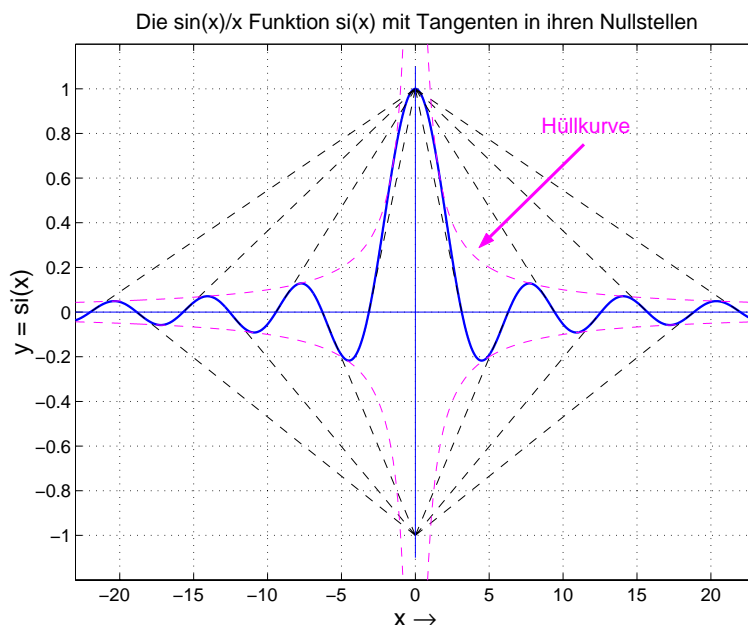


Bild 6.2: Die  $si\ x$  Funktion mit Tangenten in ihren Nullstellen und den Hüllkurven

### 6.2 Überleitung zur Fourier-Transformation

Die in den vorausgegangenen Abschnitten angewendete Vorgehensweise der Zerlegung der Analyse in von einander unabhängige Teilschritte zeigte deutlich den Einfluß der Form der primitiven Periode der Zeitfunktion auf die Hüllkurve des Spektrums.

Wird demnach bei einer periodischen Funktion nur die Form der primitiven Periode verändert, so ändert sich im Spektrum nur dessen Hüllkurve. Die Position der Linien bleibt unverändert und ihre Länge braucht offensichtlich nur der aktuellen Hüllkurve angepaßt zu werden. Das bedeutet auch, daß es nicht nötig ist, beliebige Kurvenformen „zu Fuß“ mittels der Fourier-Analyse durchzurechnen, da man die Ergebnisse offensichtlich weit eleganter und anschaulicher gewinnen kann.

Es liegt daher nahe, zunächst folgendes Teilproblem zu betrachten:

**Form der primitiven Periode der Zeitfunktion**     $\circ \text{---} \bullet$     **Form der Hüllkurve des Spektrums**

Das wird im nächsten Kapitel geschehen und es wird sich zeigen, daß dieser Zusammenhang genau mit Hilfe der *Fourier-Transformation* beschrieben wird.

## Literatur

- [1] Bracewell, R.N.: *The Fourier Transform and its Applications*, 2nd ed. rev., McGraw–Hill, 1986
- [2] Bergmann, K.: *Lehrbuch der Fernmeldetechnik*, 5. A., Fachverlag Schiele & Schoen, 1986
- [3] Küpfmüller, K.: *Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung*, 3. A., S. Hirzel Verlag, 1968
- [4] Kraniuskas, P.: *Transforms in Signals and Systems*, Addison–Wesley, 1992
- [5] Randall, R.B.; Tech, B.A.: *Frequency Analysis*, Brüel & Kjaer, 1977
- [6] Lüke, H.D.: *Signalübertragung*, 5. A., Springer, 1992