

Modulation und Rauschen

Inhaltsverzeichnis

1 Rauschen	1
1.1 Thermisches Rauschen	1
1.1.1 Spektrale Leistungs-Dichte des Thermischen Rauschens	1
1.1.2 Rauschende Widerstände	2
1.1.3 Blind-Widerstände	3
1.1.4 Amplituden-Verteilung des Thermischen Rauschens	3
1.1.5 Simulation einer Rausch-Spannung	4
1.2 Basisband-Rauschen	4
1.2.1 Auto-Korrelation und Spektrale Leistungs-Dichte	4
1.2.2 Rausch-Leistung und Bandbreite	5
1.2.3 Tiefpaß-Filterung von Weißem Rauschen	6
1.2.4 Die äquivalente Rausch-Bandbreite	6
1.2.5 Addition von Rausch-Signalen	8
1.2.6 Nachrichten-Signal und Rauschen; Signal-zu-Geräusch-Verhältnis SNR	8
1.3 Bandpaß-Rauschen	9
1.3.1 Das Äquivalente Tiefpaß-Rauschen	10
1.3.2 Auto-Korrelations-Funktion von schmalbandigem Bandpaß-Rauschen	11
1.3.3 Amplituden-Dichte-Verteilung von Schmalband-Rauschen: Rayleigh	11
2 Amplituden-Modulationen und Rauschen	13
2.1 Autokorrelation und Spektrale Leistungs-Dichte einer Trägerschwingung	13
2.1.1 Unmodulierter Träger	13
2.1.2 DSB modulierter Träger	13
2.2 Basisband-Übertragung und Rauschen	14
2.3 Doppel-Seiten-Band (DSB) Modulation und Rauschen	15
2.3.1 Signal-zu-Geräusch-Verhältnis der DSB	15
2.4 Einseitenband-Modulation (SSB) und Rauschen	16
2.5 Amplituden-Modulation mit Träger (AM) und Rauschen	16
2.5.1 Synchrone Demodulation von AM	16
2.5.2 Hüllkurven-Demodulation bei großem SNR	17
2.5.3 Hüllkurven-Demodulation bei kleinem SNR	17
3 Winkel-Modulation und Rauschen	18
3.1 Verwandtschaft von FM und PM	18
3.1.1 Die Carson-Bandbreite	19
3.1.2 Das Empfangs-Signal	20
3.2 Phasen-Modulation und Rauschen	20
3.2.1 Die Stör-Leistungen	21
3.2.2 Das SNR von PM	22
3.3 Frequenz-Modulation und Rauschen	22
3.3.1 Das SNR von FM	23
3.3.2 FM mit Pre-Emphase und De-Emphase	24
3.4 Schwellen-Effekt	24

Abbildungsverzeichnis

1.1 Amplituden-Dichte-Funktion von Gauß'schem Rauschen	2
1.2 Ersatz-Schaltbilder für rauschende Widerstände	3
1.3 Rauschen und Gauß-förmige PDF	3
1.4 Der Crest-Faktor von Rauschen mit Gauß-förmiger PDF	3
1.5 Crest-Faktor einer Summe von Cosinus-Schwingungen	4
1.6 AKF & PSD von WGN	5
1.7 Rauschen mit endlicher Bandbreite	5

1.8	Ein- und Ausgangs-Größen eines LTI-Systems	6
1.9	Effektive Rausch-Bandbreiten $B_n = B_{\text{eff}}$ eines TP	6
1.10	RC-Tiefpaß mit Amplituden-Gang und Phasen-Gang	7
1.11	RC-Tiefpaß: $ \text{Amplituden-Gang} ^2$ $ H(\omega) ^2$ und effektive Rausch-Bandbreite ω_{eff}	7
1.12	Spektrale Leistungs-Dichte und Zeitverlauf des Schmalband-Rauschens	9
1.13	Zeiger-Darstellung des Bandpaß-Rauschens	10
1.14	Vektor-Diagramm (komplexe Einhüllende) von Bandpaß-Rauschen	10
1.15	I/Q-Demodulator zur Gewinnung der äquivalenten Tiefpaß Rausch-Signale	10
1.16	I/Q-Modulator zur Gewinnung des Bandpaß-Rauschens	10
1.17	Spektrale Leistungs-Dichte des äquivalenten Tiefpaß-Rauschens	11
1.18	Spektrale Leistungs-Dichte und AKF von BP-Rauschen	11
1.19	Rayleigh-Verteilungen; Amplitude Schmalband-Rauschen	12
2.1	Auto-Korrelations-Funktion $R_{u_c}(\tau)$ der Träger-Schwingung	13
2.2	Blockschaltbild einer Basis-Band-Übertragung	14
2.3	Leistungs-Dichte-Spektren (normiert) einer Basisband-Übertragung	14
2.4	Blockschaltbild einer DSB-Übertragung	15
2.5	Leistungs-Dichte-Spektren im DSB-Empfänger	16
2.6	Zeiger-Diagramm der AM für großes SNR und kleines SNR	18
2.7	SNR der AM für synchrone und Hüllkurven-Demodulation	18
3.1	Blockschaltbild einer FM/PM-Übertragung	19
3.2	Modulation und Demodulation von FM mit Phasen-Modulator und -Demodulator	19
3.3	Zeiger-Diagramm der Winkel-Modulation mit Rauschen	20
3.4	Rausch-Leistungs-Dichten bei PM (mitte) und FM (rechts)	22
3.5	Pre-Emphase & De-Emphase	24
3.6	Bode-Diagramm Pre-Emphase; Reduktion des Geräusches	24
3.7	FM-Zeiger SNR groß & SNR klein	25
3.8	FM-Ortskurve SNR groß & SNR klein; Klicks im Ausgangs-Signal	25
3.9	FM-Schwelle	26

Modulation und Rauschen

Auf dem Übertragungs-Kanal erleidet ein modulierte Signal vielerlei Störungen durch:

- Rauschen (thermisch, galaktisch)
- Echos (durch Mehrwege-Ausbreitung \implies Mobilfunk)
- Doppler-Verschiebungen (durch Bewegung von Sender, Empfänger oder Streuer \implies Mobilfunk)
- Interferenzen (durch andere frequenzmäßig benachbarte Nachrichten-Signale)
- Knacke, Prasseln usw. (z.B. durch Funkenbildung in Maschinen, Gewitter)

In diesem Kapitel wird (nur) die elementarste dieser Störungen, das **Thermische Rauschen**, betrachtet.

1 Rauschen

Rauschen stellt die untere Grenze für ein Nachrichten-Signal dar, denn ein Strom besteht aus (vielen) einzelnen Elektronen. Je schwächer das Signal wird, umso weniger Elektronen sind beteiligt. Die Bewegung der Elektronen unterliegt jedoch nicht nur der Kraft, die durch die Spannung der Signalquelle aufgebracht wird, sondern auch den Stößen, die durch die Atome des Leiters auftreten. Die Bewegung der Atome wird als deren Temperatur, gemessen in K (Kelvin), wahrgenommen. Es handelt sich somit um Thermisches Rauschen.

- Grundsätzlich wird eine Nachrichten-Übertragung immer derart optimiert, daß nicht mehr Sende-Leistung als (unbedingt) notwendig aufgebracht wird. Als Maß dafür dient der Signal-zu-Geräusch-Abstand (SNR *signal to noise ratio*) am Ausgang des Empfängers.
- Aus diesem Grund ist das Empfangs-Rauschen maßgeblich für die untere System-Grenze eines Übertragungs-Systems.

1.1 Thermisches Rauschen

Thermisches Rauschen stellt eine sehr kleine Wechsellspannung dar. Diese wurde erst entdeckt, als es (mit Hilfe von Röhren ca. 1927) möglich war, Empfangs-Spannungen von langen Telefon-Leitungen (fast) beliebig zu verstärken.

1.1.1 Spektrale Leistungs-Dichte des Thermischen Rauschens

Die **spektrale Leistungsdichte** S_n des Thermischen Rauschens ist proportional zur absoluten Temperatur T und ergibt sich (frequenz-unabhängig) zu:

$$\begin{array}{l} S_n(f) = \frac{kT}{2} = \frac{N_0}{2} \quad [W/Hz] \quad \text{einseitige Darstellung \& natürliche Frequenz } f \\ S_n(\omega) = \frac{kT}{2} = \frac{N_0}{2} \quad [W/\frac{1}{s} = Ws] \quad \text{zweiseitige Darstellung \& Kreis-Frequenz } \omega \end{array} \quad (1.1)$$

Hierbei ist:

$$k = 1,3805 \cdot 10^{-23} \quad [Ws/K = J/K] \quad \text{Boltzmann Konstante; } T \quad [K] \quad \text{absolute Temperatur}$$

Für Normal-Temperatur (17^0 C bzw. $T_0 = 290$ K) ergibt sich:

$$S_{n_0} = 4 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz} \quad \rightsquigarrow \quad -174,0 \text{ dBm/Hz} \quad (1.2)$$

Die spektrale Leistungsdichte des Rauschens ist gemäß Gleichung (1.1) konstant für alle Frequenzen. Das kann aus physikalischen Gründen nicht stimmen, da sich dann eine theoretisch ∞ große Rauschleistung ergäbe.

Mit Hilfe der Quanten-Mechanik ergibt sich die exakte Gleichung für das Thermische Rauschen zu:

$$S_n(f) = \frac{hf}{\exp(hf/kT) - 1} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \quad \text{Spektrale Leistungs-Dichte} \quad (1.3)$$

Hierbei ist:

$$h = 6,625 \cdot 10^{-34} \quad [Js] \quad \text{Planck'sches Wirkungs-Quantum}$$

Damit ist sichergestellt, daß für beliebig hohe Frequenzen das Thermische Rauschen $\rightarrow 0$ geht. Allerdings gibt es auch für diese hohen Frequenzen keine rauschfreien Bauelemente, denn dann kommt ein ein Quantenrauschen hinzu, Bild 1.1.

$$S_{\text{quant}}(f) = hf \quad \text{spektrale Leistungsdichte von Quanten-Rauschen} \quad (1.4)$$

Der Übergangsbereich zwischen Thermischem und Quanten-Rauschen ist für $T = 2,9 \text{ K}$ bei 40 GHz , für $T = 29 \text{ K}$ bei 400 GHz und für $T = 290 \text{ K}$ bei $4000 \text{ GHz} = 4 \text{ THz}$ (fernes Infra-Rot).

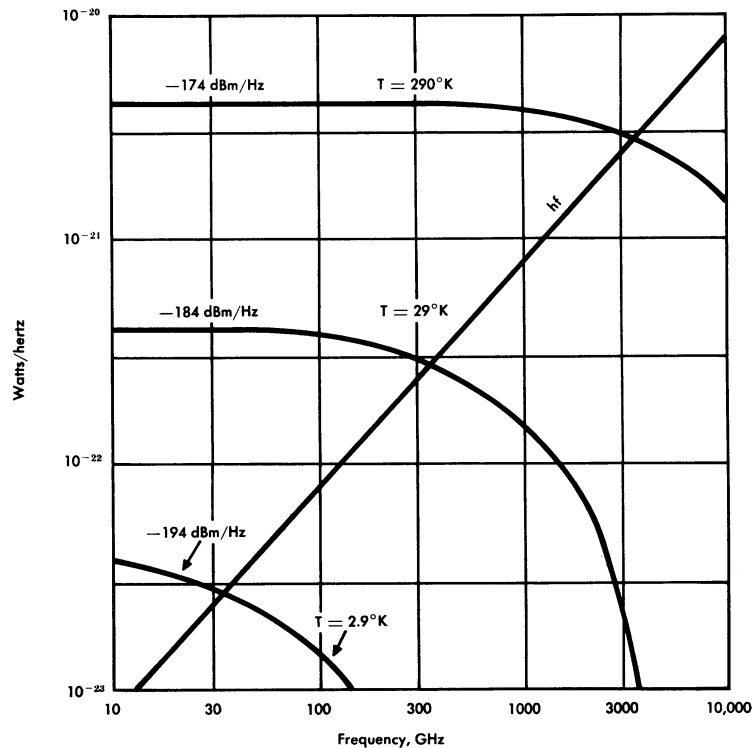


Bild 1.1: Amplituden-Dichte-Funktion von Gauß'schem Rauschen

Bei elektronischen Schaltungen ist die obere Grenz-Frequenz i.a. (viel) kleiner als 4 THz . Daher kann in der Praxis mit der vereinfachten Formel Gleichung (1.1) gerechnet werden. Die Thermische **Rauschleistung** P_n innerhalb einer Bandbreite $B \text{ Hz}$ wird damit proportional zur Bandbreite.

$$P_n/W = kT \cdot B/Hz = kT_0 B \frac{T}{T_0} \quad \rightsquigarrow \quad p_n/dBm = -174 + 10 \log_{10}(T/T_0) + 10 \log_{10} B/Hz \quad (1.5)$$

1.1.2 Rauschende Widerstände

An den Anschlüssen Ohm'scher Widerstände R/Ω mit der Temperatur T/K kann eine thermische Rauschspannung $u_{n\text{eff}}/V$ (Leerlauf-Spannung) innerhalb einer Meß-Bandbreite B_n/Hz gemessen werden.

$$u_{n\text{eff}} = \sqrt{4kTRB_n} \quad (1.6)$$

Äquivalent dazu ist die Messung eines effektiven Kurzschluß-Stomes $i_{n\text{eff}}/A$ des Rauschens.

$$i_{n\text{eff}} = \sqrt{\frac{4kTB_n}{R}} \quad (1.7)$$

Ein rauschender Widerstand kann daher ersatzweise als nicht rauschender Widerstand in Verbindung mit einer Rauschquelle dargestellt werden, Bild 1.2.

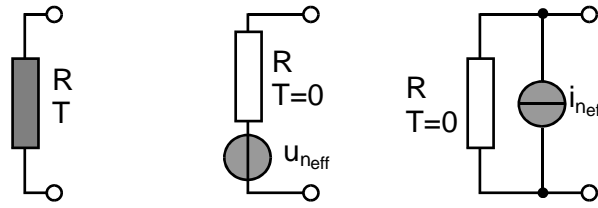


Bild 1.2: Ersatz-Schaltbilder für rauschende Widerstände

1.1.3 Blind-Widerstände

- Verlustfreie (reine) **Blindwiderstände** (L, C) setzen Strom nicht in Wärme um. Folglich wird in ihnen auch keine Wärme in Spannung oder Strom umgesetzt. Sie sind deshalb **rauschfrei**.

Reale Spulen und Kondensatoren haben Verluste, die im Ersatz-Schaltbild durch Widerstände dargestellt werden. Diese Widerstände erzeugen Thermisches Rauschen. An den Klemmen dieser Spulen bzw. Kondensatoren mißt man jedoch kein weißes (frequenz-unabhängiges) Rauschen, weil die betreffenden Blindanteile (gemäß dem jeweiligen Ersatz-Schaltbild) als Filter wirken.

1.1.4 Amplituden-Verteilung des Thermischen Rauschens

Die **Amplituden-Dichte-Verteilung** $p(u_n)$ (PDF *probability density function*) des Thermischen Rauschens $u_n(t)$ hat die Form einer Gauß-Glocke, Bild 1.3.

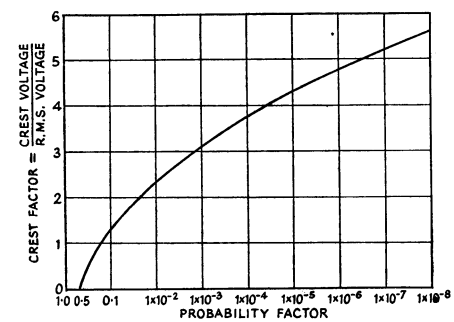
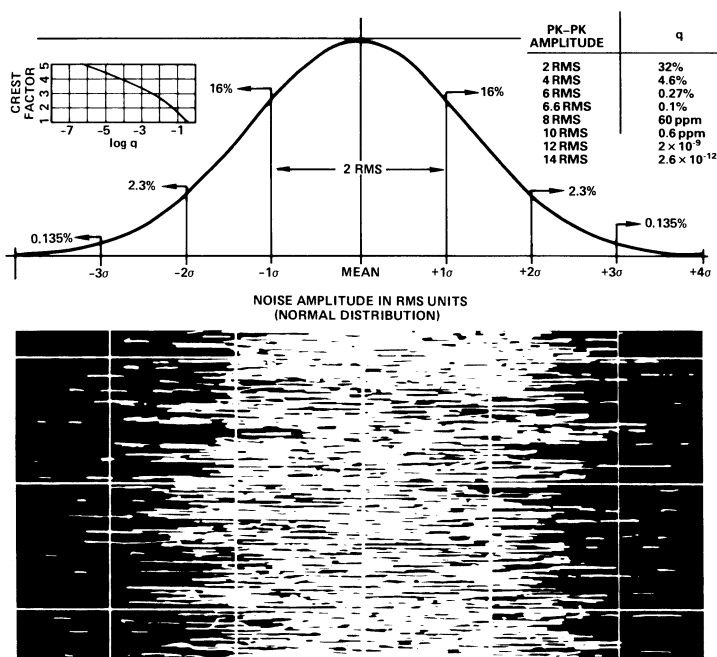


Bild 1.4: Der Crest-Faktor von Rauschen mit Gauß-förmiger PDF

Bild 1.3: Rauschen und Gauß-förmige PDF (*probability density function*, ADV Amplituden-Dichte-Verteilung)

$$p(u_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{u_n^2}{2\sigma_n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left\{-\frac{u_n^2}{2\sigma_n^2}\right\}; \quad \sigma_n = u_{n\text{eff}} \quad \text{Streuung} = \text{Effektiv-Wert} \quad (1.8)$$

$$\sigma_n^2 = \text{Var} = E\{u_n(t)^2\} = \overline{u_n(t)^2} = P_n \quad \text{Varianz} = \text{Wechsel-Leistung an } 1\Omega \quad (1.9)$$

- Die Form der Gauß-Glocke ergibt sich nach dem **Zentralen Grenzwert-Satz**, wenn eine Vielzahl gleichartiger und statistisch von einander unabhängiger Prozesse additiv zusammenwirken.

1.1.5 Simulation einer Rausch-Spannung

Für meßtechnische Zwecke kann eine Rausch-Spannung sehr genau durch eine (hinreichend große) Summe von Cosinus-Schwingungen nachgebildet werden, was sich am Crest-Faktor zeigt, Bild 1.5.

$$u_n(t) \approx \sum_{k=1}^{k_N} A_k \cos(\omega_k t + \Theta_k) \tag{1.10}$$

k_N : Anzahl der verwendeten Cosinus-Schwingungen; normal: $k_N > 10$

A_k : Amplitude der Cosinus-Schwingung k ; normal: alle Amplituden (ungefähr) gleich groß.

ω_k : Frequenz der Cosinus-Schwingung k ; normal: gleichmäßig im Frequenz-Intervall aufteilen.

Θ_k : Phase der Cosinus-Schwingung k ; ideal: gleichverteilt; real: freilaufende Oszillatoren.

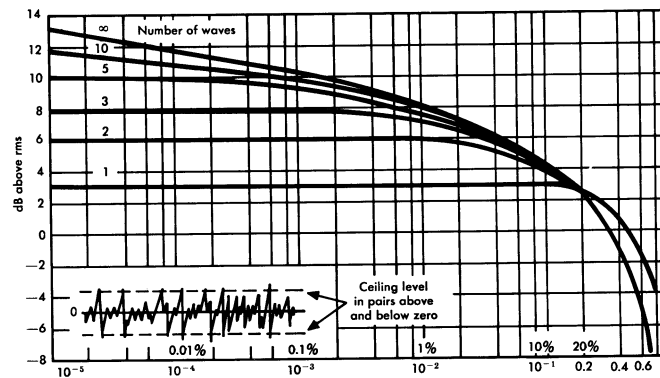


Bild 1.5: Crest-Faktor einer Summe von Cosinus-Schwingungen mit gleichverteilten Phasen zur Nachbildung von Gauß'schem Rauschen

Crest-Faktor von Vielträger-Modulationen

Digitale Vielträger-Modulationen (OFDM, COFDM: *coded orthogonal frequency division multiplex*) verwenden viele modulierte Sub-Träger innerhalb des Übertragungs-Kanals. Im Falle des terrestrischen Fernsehens (DVB-T: *digital video broadcast terrestrial*) sind das z.B. 6785 Teil-Kanäle in einer Bandbreite von 7,573 MHz (bzw. 6,63 MHz).

Das sich dabei ergebende Summensignal hat wegen der großen Anzahl der parallelen Teil-Kanäle (mit guter Genauigkeit) eine Gauß-förmige Amplituden-Dichte-Verteilung und einen entsprechenden großen Crest-Faktor. Als Zeitfunktion ist OFDM praktisch von Rauschen kaum unterscheidbar.

Eine entsprechende Aussage gilt auch für andere COFDM Anwendungen bei DAB (*digital audio broadcast*), bei DRM (*digital radio mondiale*) und bei WLAN.

1.2 Basisband-Rauschen

1.2.1 Auto-Korrelation und Spektrale Leistungs-Dichte

Auto-Korrelations-Funktion $R_{nn}(\tau)$ und Spektrale Leistungs-Dichte $S_n(\omega) = S_{nn}(\omega)$ bilden ein Fourier-Paar (Theorem von Einstein-Wiener-Khintchine). Dies gilt ganz allgemein, also auch für Rausch-Spannungen.

$$R_{nn}(\tau) \text{ --- } S_{nn}(\omega) \quad \text{Einstein-Wiener-Khintchine} \tag{1.11}$$

Unterstellt man für **weißes Rauschen** eine konstante Rauschleistungs-Dichte, so ergibt sich daraus eine δ -förmige Autokorrelations-Funktion (AKF).

$$R_{nn}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \text{ --- } S_{nn}(\omega) = \frac{N_0}{2} \quad \text{Weißes Rauschen} \tag{1.12}$$

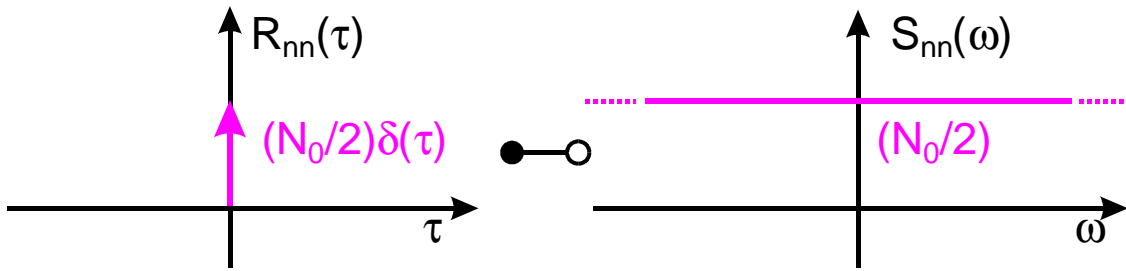


Bild 1.6: Auto-Korrelations-Funktion und Spektrale Leistungs-Dichte von Weißem Rauschen (WGN: *white Gaussian noise*)

Die Auto-Korrelations-Funktion (AKF) des Rauschens ist:

$$R_{nn}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n(t)n(t+\tau) dt = n(t) * n(t) = n(-t) * n(t) \tag{1.13}$$

Die Spektrale Leistungsdichte des (weißen) Rauschens hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} S_{nn}(\omega) &= \frac{N_0}{2} \geq 0 && \text{positiv für alle } \omega \\ S_{nn}(-\omega) &= S_{nn}(\omega) && \text{gerade in } \omega \\ P_n &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} S_{nn}(\omega) d\omega && \text{Rausch-Leistung } \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{1.14}$$

Für den Fall des weißen Rauschens wird die Leistung, die sich aus Gleichung (1.14) berechnet $P_n \rightarrow \infty$, wie das im Abschnitt 1.1.1 bereits angesprochen wurde.

1.2.2 Rausch-Leistung und Bandbreite

Berechnet man die Leistung eines weißen Rauschens innerhalb einer endlichen Bandbreite (ω_g, f_g) , ergeben sich (in Übereinstimmung mit Gleichung (1.1), Seite 1) Verhältnisse wie in Bild 1.7.

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} \frac{N_0}{2} d\omega = \int_{-f_g}^{f_g} \frac{N_0}{2} df = \int_0^{f_g} N_0 df = N_0 f_g = \frac{N_0 \omega_g}{2\pi} \tag{1.15}$$

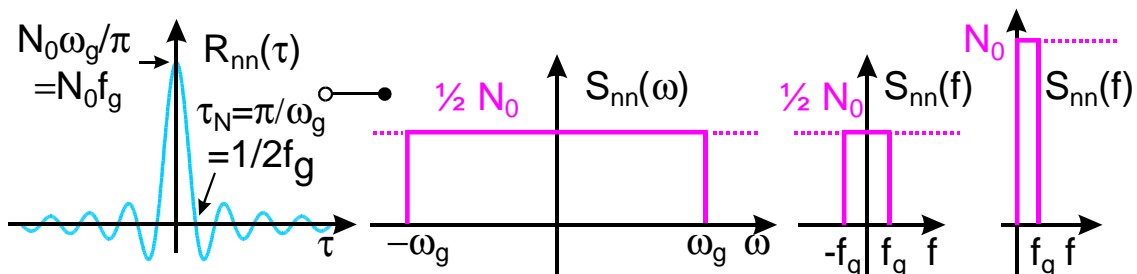


Bild 1.7: Rauschen mit endlicher Bandbreite; Auto-Korrelations-Funktion (AKF) $R_{nn}(\tau)$ und Spektrale Leistungs-Dichte $S_{nn}(\omega)$: zweiseitige Darstellung über ω und f und einseitige Darstellung über f

Bild 1.7 ist (auch) ein anschauliches Beispiel dafür, daß eine über der Kreis-Frequenz ω berechnete Fläche stets um den Faktor 2π zu groß wird, weshalb dieser Wert durch 2π dividiert werden muß.

1.2.3 Tiefpaß-Filterung von Weißem Rauschen

Ein Tiefpaß stellt ein LTI (*linear time invariant*) System dar. Ein- und Ausgangs-Größen eines LTI-Systems sind im Zeitbereich mit der Faltung der Impulsantwort $h(t)$ und im Frequenzbereich multiplikativ mit der Übertragungsfunktion $H(\omega)$ verknüpft, Bild 1.8.

$$u_a(t) = u_e(t) * h(t) \quad \circ \bullet \quad U_a(\omega) = U_e(\omega) \cdot H(\omega) \quad \text{LTI-System deterministisch} \quad (1.16)$$

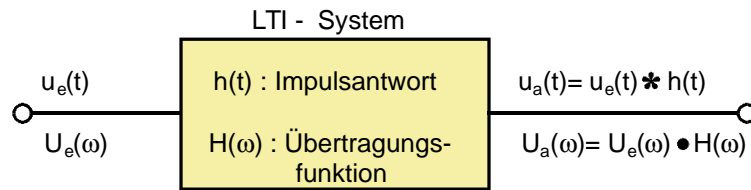


Bild 1.8: Ein- und Ausgangs-Größen eines LTI-Systems

Die Verknüpfungs-Beziehungen lassen sich nur dann auswerten, wenn $u_e(t)$ oder $U_e(\omega)$ explizit bekannt sind. Das trifft aber für Rauschen, das eine stochastische Funktion darstellt, gerade nicht zu.

Für stochastische Signale gelten gleichartige Beziehungen für die Auto-Korrelations-Funktionen und die spektralen Leistungs-Dichten.¹ (Indices *ee* (statt $u_e u_e$) für Eingangs-Größen; Indices *aa* (statt $u_a u_a$) für Ausgangs-Größen)

$$R_{aa}(\tau) = R_{ee}(\tau) * R_{hh}(\tau) \quad \circ \bullet \quad S_{aa}(\omega) = S_{ee}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \quad \text{LTI-System stochastisch} \quad (1.17)$$

1.2.4 Die äquivalente Rausch-Bandbreite

Die äquivalente Rausch-Bandbreite $B_n = B_{\text{eff}}$ eines Systems ist die Bandbreite eines idealen \square -förmigen Filters, das die gleiche Rauschleistung passieren läßt wie das aktuelle Filter, Bild 1.9. Hat man B_n bestimmt, läßt sich die Rauschleistung mit Gleichung 1.15 sofort angeben.

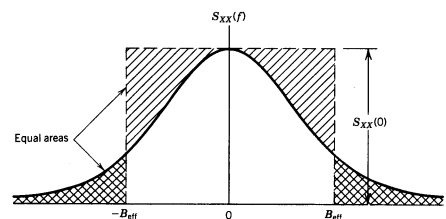


Bild 1.9: Effektive Rausch-Bandbreiten $B_n = B_{\text{eff}}$ eines TP

Äquivalente Rausch-Bandbreite eines RC-Tiefpasses

Die Übertragungsfunktion $H(\omega)$ bzw. der Amplituden-Gang $A(\omega) = |H(\omega)|$ des RC-Tiefpasses, Bild 1.10, ergibt sich mit komplexer Rechnung zu²:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}; \quad T = R \cdot C \quad \rightsquigarrow \quad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}; \quad \omega_{3dB} = \frac{1}{T} \quad (1.18)$$

Bei der Frequenz $\omega = \omega_{3dB}$ ist der Amplituden-Gang $|H(\omega)|$ auf den Wert $|H(0)|/\sqrt{2}$ abgesunken.

$$|H(\omega_{3dB})| = \frac{H(0)}{\sqrt{2}} \quad (1.19)$$

¹Siehe: „Die Fourier-Transformation und ihre Anwendungen“, Kapitel 6.

²Siehe die Kapitel: „Anwendungen der Fourier-Transformation“, Teil 4; „Lineare Übertragungs-Systeme“, „Filter-Systeme“

Die Eingangs-Spannung des RC-TP sei weißes Gauß'sches Rauschen $u_n(t)$.

$$u_e(t) = u_n(t); \quad \text{mit} \quad S_{nn}(\omega) = \frac{N_0}{2} \tag{1.20}$$

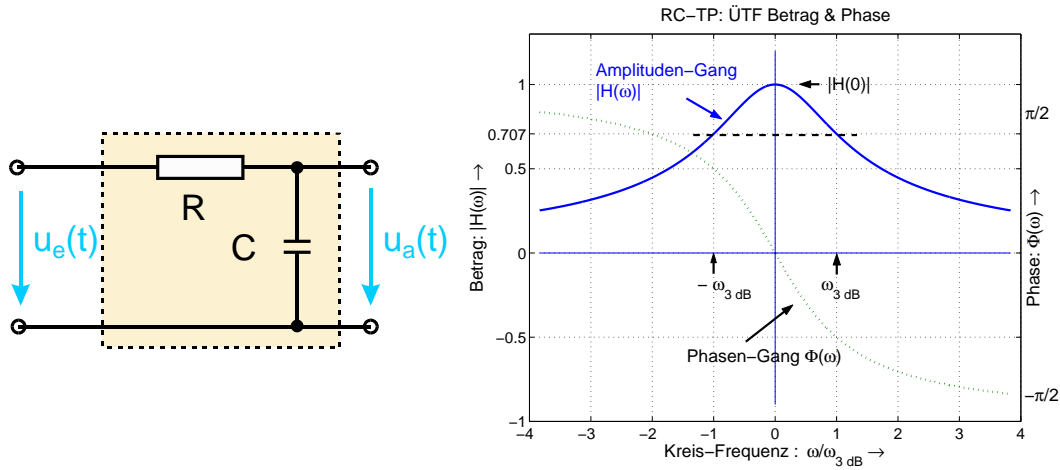


Bild 1.10: RC-Tiefpaß mit Amplituden-Gang und Phasen-Gang

Die Ausgangs-Spannung ist dann gemäß Gleichung (1.17) „farbiges“ Rauschen $u_r(t)$ mit ebenfalls Gauß-förmiger Amplituden-Dichte-Verteilung³ und der spektralen Leistungs-Dichte $S_{rr}(\omega)$.

$$S_{rr}(\omega) = S_{nn}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot |H(\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{1 + (\omega T)^2} = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{1 + (\omega/\omega_{3dB})^2} \tag{1.21}$$

Der Verlauf von $|H(\omega)|^2$ ist in Bild 1.11 dargestellt.

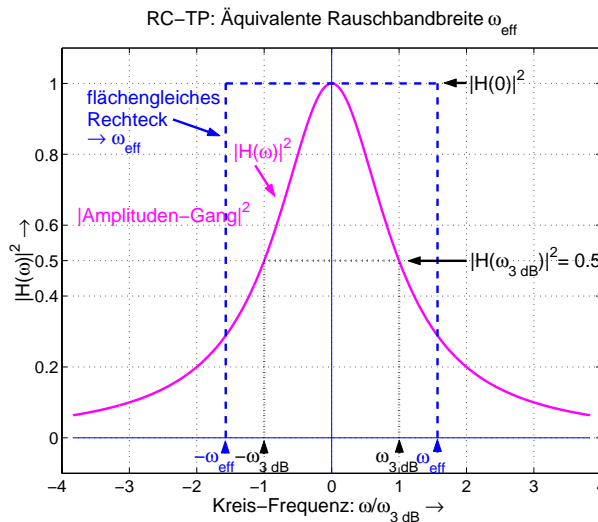


Bild 1.11: RC-Tiefpaß: $|Amplituden-Gang|^2$ $|H(\omega)|^2$ und effektive Rausch-Bandbreite ω_{eff}

Bei der Frequenz $\omega = \omega_{3dB}$ ist $|H(\omega)|^2$ auf den Wert $\frac{|H(0)|^2}{2}$ abgesunken. Es wird nur noch die halbe Leistung übertragen, bezogen auf den Wert bei der Frequenz $\omega = 0$.

³Bei der Übertragung über lineare Systeme bleibt die Gauß-förmige Amplituden-Dichte-Verteilung erhalten.

Die Rausch-Leistung am Ausgang des RC-TP berechnet sich zu:

$$P_r = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\omega/\omega_{3dB})^2} d\omega = \frac{N_0}{2} \frac{\omega_{3dB}}{2\pi} \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_{3dB}} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{N_0}{2} \frac{\omega_{3dB}}{2} = \frac{N_0}{2} \pi f_{3dB} \quad (1.22)$$

Die äquivalente (oder effektive) Rauschbandbreite ω_{eff} ist die Grenzfrequenz eines \square -förmigen Filters, Bild 1.11.

$$\frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \cdot 2\omega_{\text{eff}} = \frac{N_0}{2} \frac{\omega_{3dB}}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\omega_{\text{eff}} = \frac{\pi}{2} \omega_{3dB} \rightsquigarrow B_n = \frac{\pi}{2} f_{3dB} \quad \text{eff. Rausch-Bandbreite RC-TP}} \quad (1.23)$$

Äquivalente Rausch-Bandbreite eines LC-Schwingkreises

Die eff. Rausch-Bandbreite eines LC-Schwingkreises berechnet sich entsprechend zu der des RC-TP und ergibt sich zu:

$$\boxed{B_n = \frac{\pi}{2} B_{3dB} = \frac{\pi}{2} \frac{f_0}{Q}} \quad \text{mit} \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0 C}{G} \quad (1.24)$$

Äquivalente Rausch-Bandbreite steilflankiger Filter

Für steilflankige Filter ist die eff. Rausch-Bandbreite näherungsweise der 3 dB Bandbreite.

$$B_n \gtrsim B_{3dB} \quad (1.25)$$

1.2.5 Addition von Rausch-Signalen

Es seien 2 Rausch-Signale $u_{n_1}(t) = n_1(t)$ und $u_{n_2}(t) = n_2(t)$ gegeben, die aus physikalisch von einander unabhängigen Quellen stammen. Es werde die Summe gebildet.

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t) \quad (1.26)$$

Die Leistung P_n des Summen-Signals ist damit:

$$P_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [n(t)]^2 dt = P_{n_1} + P_{n_2} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n_1(t)n_2(t) dt \quad (1.27)$$

Da die Rausch-Signale aus unabhängigen Quellen stammen, sind sie unkorreliert, weshalb das rechte Integral verschwindet, das die Kreuz-Korrelations-Funktion (KKF) $R_{n_1 n_2}(\tau = 0)$ ist.

$$\boxed{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n_1(t)n_2(t) dt = R_{n_1 n_2}(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0 \quad \text{KKF} \quad n_1(t) \text{ und } n_2(t) \quad \text{unkorreliert}} \quad (1.28)$$

- Rauschen aus unkorrelierten Quellen addiert sich leistungsmäßig.

$$\boxed{P_n = P_{n_1} + P_{n_2} \quad \text{Addition von Rausch-Leistungen}} \quad (1.29)$$

1.2.6 Nachrichten-Signal und Rauschen; Signal-zu-Geräusch-Verhältnis SNR

Das Nachrichten-Signal $u_N(t)$ sei aus 2 Quellen verfügbar, wobei die Rausch-Spannungen $n_1(t), n_2(t)$ dieser Quellen unkorreliert sein sollen. Beide Signale werden addiert.

$$u(t) = 2u_N(t) + n_1(t) + n_2(t) \quad \rightsquigarrow \quad P = 4P_{u_N} + P_{n_1} + P_{n_2} = 4P_{u_N} + 2P_n \quad (1.30)$$

Die Effektivwerte der Rauschspannungen $n_{1\text{eff}} = n_{2\text{eff}}$ seien gleich groß. Damit sind auch die Rauschleistungen gleich, $P_{n_1} = P_{n_2} = P_n$. Die Leistung der Nachricht $u_N(t)$ sei P_{u_N} . Die Nachrichtenspannungen addieren sich zu $2u_N(t)$, wodurch die gesamte Leistung der Nachricht $4P_{u_N}$ wird.

Die **Signal-zu-Geräusch-Verhältnisse** (SNR: *signal to noise ratio*) sind damit.

$$\boxed{SNR_1 = \frac{P_{uN}}{P_{n_1}} = \frac{P_{uN}}{P_n}; \quad SNR_2 = \frac{P_{uN}}{P_{n_2}} = \frac{P_{uN}}{P_n}; \quad \rightsquigarrow \quad SNR = \left(\frac{S}{N}\right) = \frac{4P_{uN}}{2P_n} = 2\frac{P_{uN}}{P_n}} \quad (1.31)$$

- Die Nachrichten-Spannungen addieren sich **kohärent**, die Rausch-Spannungen addieren sich **nicht kohärent**.

Dadurch **verbessert** sich das **Signal-zu-Geräusch-Verhältnis** ($SNR = \left(\frac{S}{N}\right)$).

Anwendungen der Verbesserung des SNR

- Seismische Messungen durch mehrere kleinere Explosionen.
- Sonographie in der Medizin.
- Demodulation von DSB: in beiden Seitenbändern steckt die gleiche Nachricht, aber die Störungen je Seitenband sind unkorreliert.

1.3 Bandpaß-Rauschen

Bandpaß-Rauschen entsteht, wenn Weißes Rauschen mit Hilfe eines Bandpaß-Filters, wie es bei Empfängern für modulierte Signale verwendet wird, gefiltert wird. Diese Filter haben Bandbreiten, deren Werte klein sind, verglichen mit der Mitten-Frequenz dieser Filter. Das Rauschen am Filter-Ausgang kann deshalb als **Schmalband-Rauschen** bezeichnet werden.

Der Zeitverlauf von Schmalband-Rauschen $n(t)$ kann als (zufällig) in seiner Amplitude und seiner Phase modulierte Hochfrequenz-Signal dargestellt werden, Bild 1.12.

Die Periode der HF-Schwingung ist (wegen der Phasen-Modulation) nur ungefähr $1/f_C$. Die Maxima der (zufälligen) Amplituden-Schwankungen liegen ca. um $1/B = 1/B_{\text{eff}}$ auseinander.

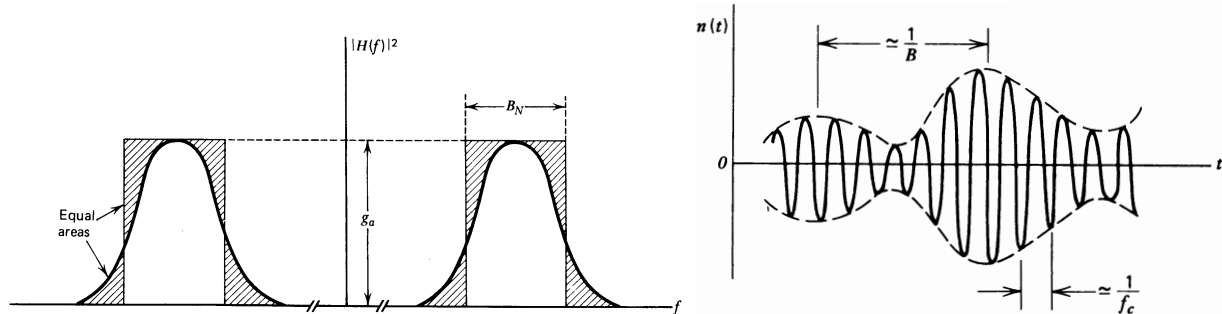


Bild 1.12: Spektrale Leistungs-Dichte und Zeitverlauf des Schmalband-Rauschens: HF-Schwingung mit zufälliger Amplituden- und Phasen-Modulation ($B_N = B$)

Das Schmalband-Rauschen kann (**polar**) als Amplituden- und Phasen-modulierte Schwingung oder (**kartesisch**) als von (zwei statistisch unabhängigen, Gauß-verteilten) Rausch-Spannungen ($n_I(t), n_Q(t)$) modulierte Cosinus bzw. Sinus-Träger dargestellt werden.

$$\boxed{n(t) = a_n(t) \cdot \cos[\Omega_C t + \theta(t)] = n_I(t) \cdot \cos(\Omega_C t) - n_Q(t) \cdot \sin(\Omega_C t)} \quad \text{Schmalband-Rauschen} \quad (1.32)$$

$$a_n(t) = \sqrt{n_I(t)^2 + n_Q(t)^2} \quad \theta(t) = \arctan \left\{ \frac{n_Q(t)}{n_I(t)} \right\} \quad (1.33)$$

- Da die zufälligen Schwankungen der Amplitude $a_n(t)$ und der Phase $\theta(t)$ statistisch von einander unabhängig sind, sind auch die kartesischen Komponenten $n_I(t), n_Q(t)$ **statistisch von einander unabhängig**.
- Die Rausch-Spannungen $n_I(t), n_Q(t)$ haben ebenfalls eine **Gauß-förmige Amplituden-Dichte** (PDF).
- Damit sind $n_I(t), n_Q(t)$ **unkorreliert**.

1.3.1 Das Äquivalente Tiefpaß-Rauschen

Die Rausch-Spannungen $n_I(t), n_Q(t)$ stellen das äquivalente Tiefpaß-Rauschen des Bandpaß-Rauschens dar. In der Darstellung als Zeiger, Bild 1.13, sieht man den Zusammenhang mit der Amplitude $a_n(t)$ und der Phase $\theta(t)$ des Bandpaß-Rauschens. Die Ortskurve der Zeigerspitze von $a_n(t)$ bildet die **komplexe Einhüllende** oder das **Vektor-Diagramm** des Bandpaß-Rauschens, Bild 1.14.

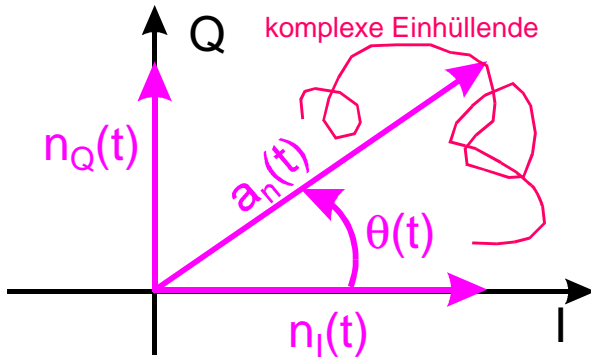


Bild 1.13: Zeiger-Darstellung des Bandpaß-Rauschens und komplexe Einhüllende (Ausschnitt)

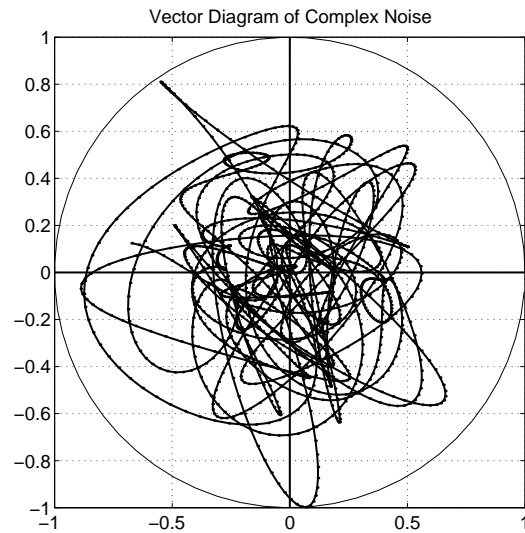


Bild 1.14: Vektor-Diagramm (komplexe Einhüllende) von Bandpaß-Rauschen

Die äquivalenten Tiefpaß-Rausch-Signale $n_I(t), n_Q(t)$ gewinnt man aus $n(t)$ gemäß Gleichung (1.32) mittels eines I/Q-Demodulators, Bild 1.15. Entsprechend kann man das Bandpaß-Rauschen $n(t)$ mit Hilfe eines I/Q Modulators aus den äquivalenten Tiefpaß-Signalen $n_I(t), n_Q(t)$ gewinnen, Bild 1.16.

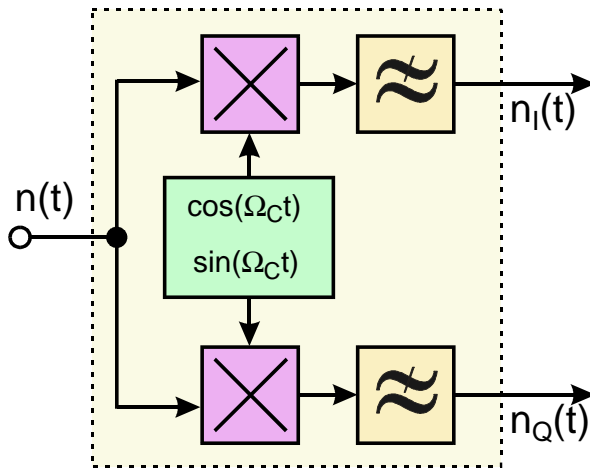


Bild 1.15: I/Q-Demodulator zur Gewinnung der äquivalenten Tiefpaß Rausch-Signale $n_I(t), n_Q(t)$

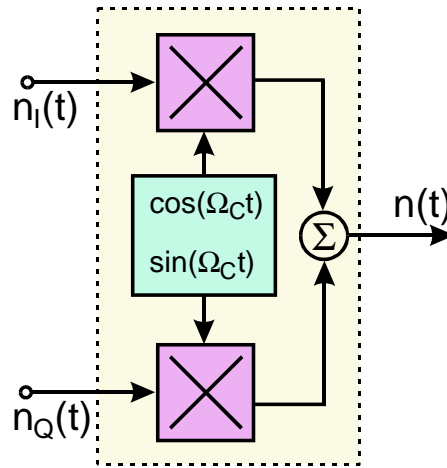


Bild 1.16: I/Q-Modulator zur Gewinnung des Bandpaß-Rauschens $n(t)$ aus den äquivalenten Tiefpaß Rausch-Signalen $n_I(t), n_Q(t)$

In der Schaltung Bild 1.15 ist als Umsetz-Frequenz $\omega_1 = \Omega_C$ gewählt, welche genau die Mitten-Frequenz des Bandpaß-Rauschens darstellen soll. Dies ist jedoch keine zwingende Bedingung. Es kann theoretisch (fast) jede beliebige Umsetz-Frequenz gewählt werden, wie Bild 1.17 zeigt.

Bei unterschiedlicher Wahl der Umsetz-Frequenz z.B. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ werden die äquivalenten Rausch-Signale

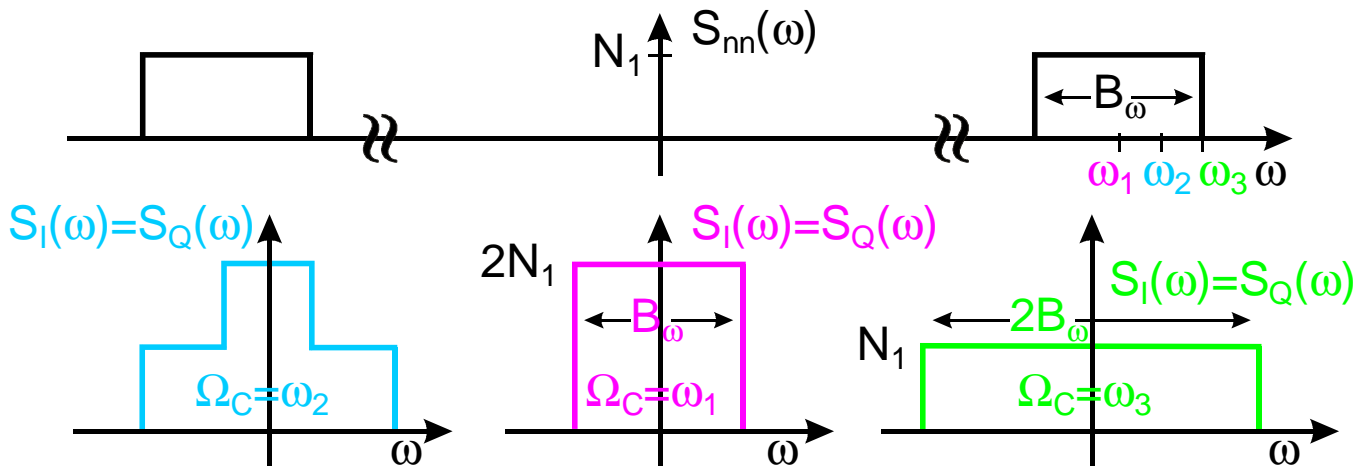


Bild 1.17: Spektrale Leistungs–Dichten $S_{nn}(\omega)$ von Bandpaß–Rauschen und $S_I(\omega), S_Q(\omega)$ des äquivalenten Tiefpaß–Rauschens in Abhängigkeit von der gewählten Umsetz–Frequenz

im Tiefpaß–Bereich $n_I(t), n_Q(t)$ offensichtlich unterschiedlich, jedoch enthalten sie in jedem Fall die gleiche Leistung P , wie aus den Flächen in Bild 1.17 sofort erkennbar wird, und es gilt:

$$P_{nn}(\omega) = P_I(\omega) = P_Q(\omega) \tag{1.34}$$

Nur in dem Fall, wo $\Omega_C = \omega_1$ gewählt wird, hat das äquivalente TP–Rauschen die kleinste Bandbreite.

1.3.2 Auto–Korrelations–Funktion von schmalbandigem Bandpaß–Rauschen

Unterstellt wird ein ideales \square –förmiges Bandpaß–Filter mit Bandbreite $2\pi B$ und Verstärkung K , womit ein weißes Rauschen mit der Spektralen Leistungs–Dichte $N_0/2$ gefiltert werde. Die sich damit nach Einstein–Wiener–Khintchine ergebende Auto–Korrelations–Funktion $R_{nn}(\tau) = R(\tau)$ zeigt Bild 1.18.

$$S_{nn}(\omega) \bullet \text{---} \circ \quad R_{nn}(\tau) = N_0 K^2 B \frac{\sin(\pi B \tau)}{\pi B \tau} \cdot \cos(\omega_c \tau) \tag{1.35}$$

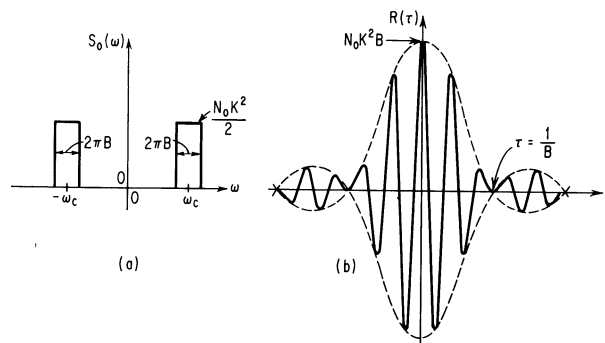


Bild 1.18: Spektrale Leistungs–Dichten $S_0(\omega) = S_{nn}(\omega)$ von schmalbandigem Bandpaß–Rauschen und Auto–Korrelations–Funktion $R(\tau) = R_{nn}(\tau)$

1.3.3 Amplituden–Dichte–Verteilung von Schmalband–Rauschen: Rayleigh

Im Unterschied zum Basis–Band–Rauschen, welches eine Gauß–förmige Amplituden–Dichte–Verteilung (PDF) hat, Bild 1.3 (Seite 3), hat das Schmalband–Rauschen keine Gauß–förmige PDF. Dies erkennt man schon daran, daß im Vektor–Diadramm, Bild 1.14 (Seite 10), keine entsprechende Häufung im Punkt $[0/0]$ auftritt. Die Linien im Vektor–Diagramm müßten sonst um $[0/0]$ herum viel dichter sein.

Da $n_I(t), n_Q(t)$ statistisch von einander unabhängig sind, haben zwar beide Rauschspannungen entsprechend zu ihrer Gauß-Verteilung der Amplituden-Dichte häufig kleine Werte, aber daß sie zufälligerweise gleichzeitig Null sind ($n_I(t) = n_Q(t) = 0$), kommt dagegen selten vor.

Die Amplituden-Dichte des Bandpaß-Rauschens hat eine **Rayleigh-Verteilung**.

Mathematisch ergibt sich die Rayleigh-Verteilung aus 2 von einander unabhängigen Gauß-Verteilungen $p(n_I)$ und $p(n_Q)$. Man bildet die Verbund-Wahrscheinlichkeits-Dichte, die wegen der statistischen Unabhängigkeit von $n_i(t), n_Q(t)$ das Produkt der einzelnen Dichte-Funktionen ist.

$$p(n_I, n_Q) = p(n_I)p(n_Q) = \frac{e^{-n_I^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{e^{-n_Q^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \frac{e^{-(n_I^2+n_Q^2)/2\sigma^2}}{2\pi\sigma^2} \tag{1.36}$$

Man betrachtet nun $p(n_I, n_Q)dn_I dn_Q$ und geht von der kartesischen Darstellung in I und Q zur polaren Darstellung in a_n und θ über. Damit erhält man die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Amplitude $a_n(t)$ und den Phasenwinkel $\theta(t)$.

$$a_n^2 = n_I^2 + n_Q^2 \quad ; \quad dn_I dn_Q = a_n da_n d\theta \tag{1.37}$$

$$p(n_I, n_Q)dn_I dn_Q \rightsquigarrow \frac{e^{-a_n^2/2\sigma^2}}{2\pi\sigma^2} a_n da_n d\theta = \left\{ \frac{a_n e^{-a_n^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} da_n \right\} \left\{ \frac{d\theta}{2\pi} \right\} = p(a_n)p(\theta)da_n d\theta \tag{1.38}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind damit für die Amplitude $a_n(t)$ und die Phase $\theta(t)$:

$p(a_n) = \begin{cases} a_n e^{-a_n^2/2\sigma^2} / \sigma^2 & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases}$	Rayleigh-Verteilung	(1.39)
$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$	Gleich-Verteilung	

Die Rayleigh-Verteilungs-Dichte (PDF) und ihr Integral, die kummulative Verteilung (CPD), zeigt Bild 1.19.

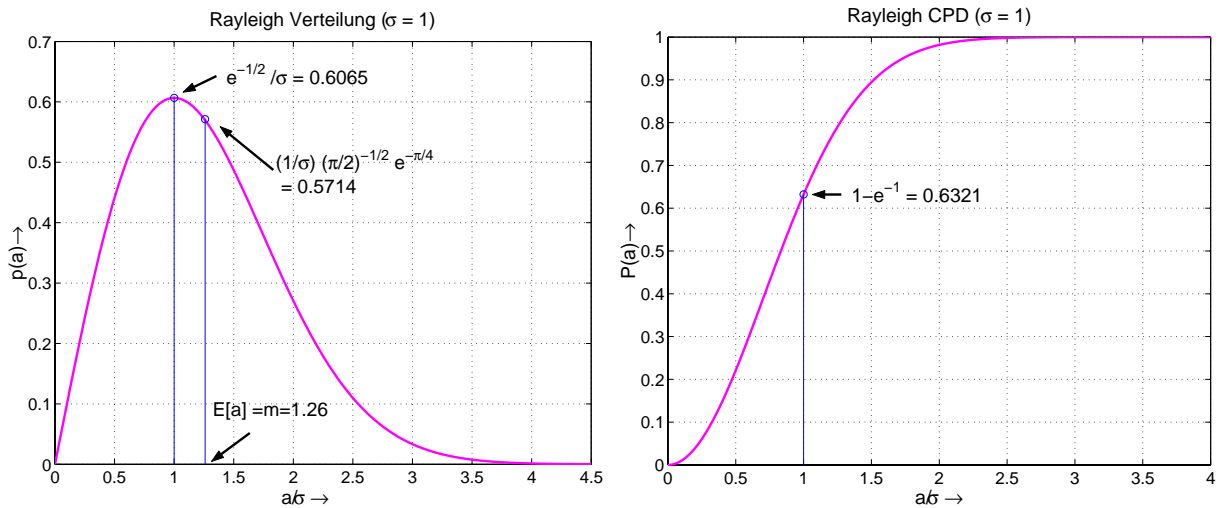


Bild 1.19: Rayleigh: Verteilungs-Dichte-Funktion (PDF) und (kummulative) Verteilungs-Funktion (CPD) der Amplitude $a_n(t)$ des Schmalband-Rauschens, normiert auf den Effektiv-Wert σ von $n_i(t)$ bzw. $n_Q(t)$

2 Amplituden-Modulationen und Rauschen

2.1 Autokorrelation und Spektrale Leistungs-Dichte einer Trägerschwingung

2.1.1 Unmodulierter Träger

Die Trägerschwingung sei:¹

$$u_C(t) = U_C \cdot \cos(\Omega_C t + \phi) \quad (2.1)$$

Der Phasenwinkel ϕ sei hierbei eine Zufalls-Größe mit einer Gleich-Verteilung $p(\theta) = 1/(2\pi); -\pi \leq \theta \leq \pi$.

Die Auto-Korrelations-Funktion (AKF) $R_{u_C}(\tau)$ der Träger-Schwingung $u_C(t)$ ergibt sich zu, Bild 2.1:

$$\begin{aligned} R_{u_C}(\tau) = \overline{u_C(t)u_C(t+\tau)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} U_C^2 \int_{-T}^T \cos(\Omega_C t + \phi) \cdot \cos(\Omega_C [t + \tau] + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{U_C^2}{2} \left\{ \int_{-T}^T \cos(\Omega_C [2t + \tau] + 2\phi) dt + \int_{-T}^T \cos(\Omega_C \tau) dt \right\} \\ &= \frac{U_C^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} 2T \cdot \cos(\Omega_C \tau) = \boxed{\frac{U_C^2}{2} \cos(\Omega_C \tau) \quad \text{AKF}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Das erste Integral in der 2. Zeile von Gleichung (2.2) wird zu Null, weil über eine ganze Anzahl von Perioden $T = 2\pi/\Omega_C$ integriert wird.

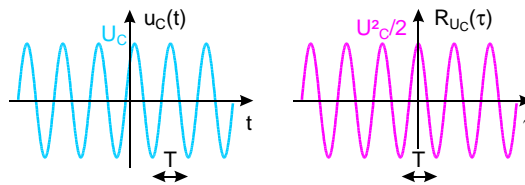


Bild 2.1: Auto-Korrelations-Funktion $R_{u_C}(\tau)$ der Träger-Schwingung

Mit dem Theorem von Einstein-Wiener-Khintchine erhält man die Spektrale Leistungs-Dichte (PSD: *power spectral density*) der Träger-Schwingung.

$$R_{u_C}(\tau) \circ \bullet \quad \boxed{S_{u_C}(\omega) = \pi U_C^2 [\delta(\omega + \Omega_C) + \delta(\omega - \Omega_C)] \quad \text{PSD}} \quad (2.3)$$

Die Leistung P_{u_C} der Trägerschwingung wird damit:

$$\boxed{P_{u_C} = \overline{u_C(t)^2} = R_{u_C}(0) = \frac{U_C^2}{2} = \frac{1}{2} U_C^2 \quad \text{Träger-Leistung}} \quad (2.4)$$

2.1.2 DSB modulierter Träger

Die Nachricht $u_N(t)$ werde als (im weitesten Sinne) stationärer Zufalls-Prozess angenommen. Um die **statistische Unabhängigkeit** zwischen dem Nachrichten-Signal $u_N(t)$ und der Trägerschwingung sicher zu stellen, wird wieder der Phasenwinkel ϕ angesetzt.

$$u_{\text{DSB}}(t) = u_N(t) \cdot u_C(t) = u_N(t) \cdot U_C \cos(\Omega_C t + \phi) \quad (2.5)$$

Für die AKF der DSB modulierten Trägerschwingung wird damit:

$$\begin{aligned} R_{\text{DSB}}(\tau) &= \overline{[u_N(t) \cdot U_C \cos(\Omega_C t + \phi)] [u_N(t + \tau) \cdot U_C \cos(\Omega_C (t + \tau) + \phi)]} \\ &= \overline{[u_N(t) u_N(t + \tau)] \cdot [U_C \cos(\Omega_C t + \phi) U_C \cos(\Omega_C (t + \tau) + \phi)]} \\ &= \underbrace{\overline{u_N(t) u_N(t + \tau)}}_{R_{u_N}(\tau)} \cdot \underbrace{\overline{[U_C \cos(\Omega_C t + \phi) U_C \cos(\Omega_C (t + \tau) + \phi)]}}_{R_{u_C}(\tau)} \\ &= R_{u_N}(\tau) \cdot \frac{U_C^2}{2} \cos(\Omega_C \tau) = \boxed{\frac{1}{2} R_{u_N}(\tau) \cdot U_C^2 \cos(\Omega_C \tau) \quad \text{AKF}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

¹Siehe: „Die Fourier-Transformation und ihre Anwendungen“, Teil 6

Da die Nachricht und der Träger statistisch von einander unabhängig sind, kann in der 3. Zeile von Gleichung (2.6) die AKF der DSB $R_{DSB}(\tau)$ als Produkt der AKF von Nachrichtensignal $R_{u_N}(\tau)$ und AKF des Trägers $R_{u_C}(\tau)$ geschrieben werden.

Die Spektrale Leistungs-Dichte (PSD) $S_{DSB}(\omega)$ wird damit, wenn $U_C = 1$ gesetzt wird:

$$R_{DSB}(\tau) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad \boxed{S_{DSB}(\omega) = \frac{1}{4}[S_{u_N}(\omega + \Omega_C) + S_{u_N}(\omega - \Omega_C)] \quad \text{PSD}} \quad (2.7)$$

Die Leistung der DSB ergibt sich (mit $U_C = 1$) zu:

$$\boxed{P_{DSB} = \overline{u_{DSB}^2(t)} = R_{DSB}(0) = \frac{1}{2}R_{u_N}(0) = \frac{1}{2}\overline{u_N^2(t)} = \frac{1}{2}P_{u_N} \quad \text{Leistung DSB}} \quad (2.8)$$

- Die Leistung des DSB modulierten Signals P_{DSB} ist dann halb so groß wie die Leistung P_{u_N} des Nachrichten-Signals.

2.2 Basisband-Übertragung und Rauschen

Als Referenz-System für modulierte Signale wird eine Übertragung im Basisband betrachtet, Bild 2.2. Der Übertragungs-Kanal dämpft das Nachrichten-Signal $u_N(t)$, was mit der Konstanten A ausgedrückt wird, $u_E(t) = Au_N(t)$, und fügt additiv Weißes Gauß'sches Rauschen $n(t)$ mit der Spektralen Leistungs-Dichte (PSD: *power spectral density*) $S_n(\omega)$ hinzu (AWGN: *additive white Gaussian noise*).

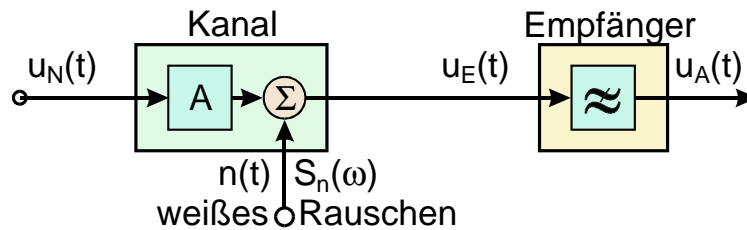


Bild 2.2: Blockschaltbild einer Basis-Band-Übertragung

Die Spektrale Leistungs-Dichte (PSD) $S_{u_N}(\omega)$ des Nachrichten-Signals $u_N(t)$ werde als trapezförmig angenommen, für die „Verstärkung“ des Kanals ist $A = 1$ angesetzt und das Tiefpaß-Filter im Empfänger sei \square -förmig, Bild 2.3.

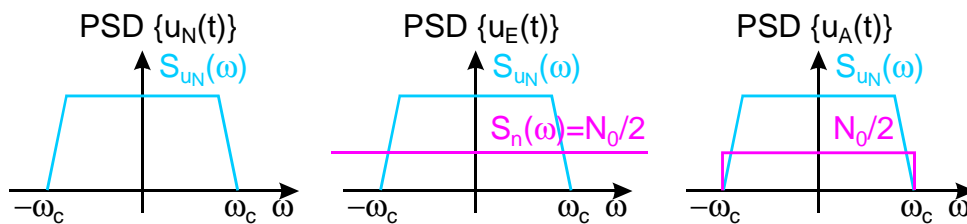


Bild 2.3: Leistungs-Dichte-Spektren (normiert) einer Basisband-Übertragung

Aus den Leistungs-Dichte-Spektren in Bild 2.3 ergibt sich das Verhältnis der Signal-Leistung P_{u_N} zur Rausch-Leistung P_n des Ausgangs-Signals $u_A(t)$ zu:

$$\boxed{SNR_o = \left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{P_{u_N}}{N_0\omega_c/2\pi} = \frac{P_{u_N}}{N_0f_c} \quad \text{SNR im Basis-Band: Referenz}} \quad (2.9)$$

Mit diesem Signal-zu-Geräusch-Verhältnis werden die Signal-zu-Geräusch-Verhältnisse am Ausgang der Demodulatoren der verschiedenen Modulationsarten verglichen.

2.3 Doppel-Seiten-Band (DSB) Modulation und Rauschen

Das Modell für eine DSB Übertragung zeigt Bild 2.4. Der Kanal habe für die Mitten-Frequenz Ω_C der DSB die gleichen Eigenschaften wie für die Basisband-Übertragung, Bild 2.2. Das Eingangs-BP-Filter des Empfängers habe Π -förmigen Amplitudengang und die Bandbreite $2\omega_c$. Das TP-Filter am Ausgang des Empfängers habe die gleiche Grenzfrequenz ω_c wie das Basisband-System.

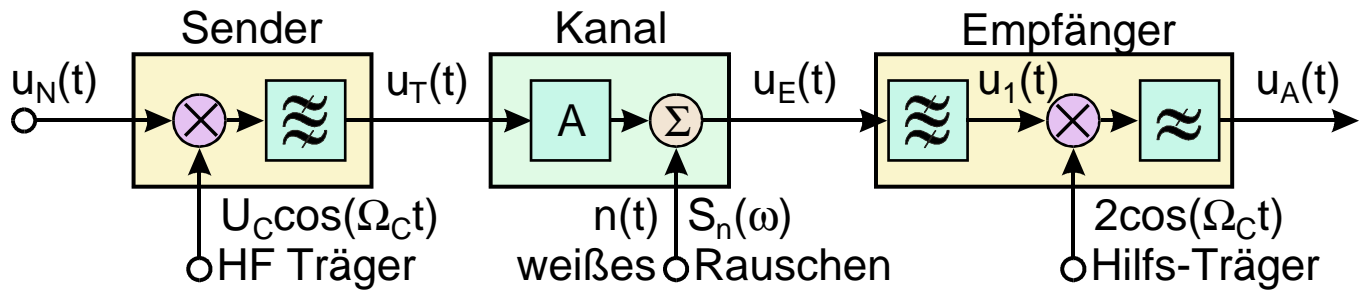


Bild 2.4: Blockschaltbild einer DSB-Übertragung

Die Ausgangs-Spannung des DSB-Senders ist:

$$u_T(t) = u_N(t) \cdot U_C \cos(\Omega_C t) \tag{2.10}$$

Am Ausgang des Kanals wird daraus, wenn (vereinfachend) $A \cdot U_C = 1$ gesetzt wird:

$$u_E(t) = A \cdot u_N(t) \cdot U_C \cos(\Omega_C t) + n(t) = u_N(t) \cdot \cos(\Omega_C t) + n(t) \tag{2.11}$$

Das Rauschen hinter dem Empfangs-BP ist **schmalbandiges Bandpaß-Rauschen** $n_1(t)$. Nach Gleichung (1.32) (Seite 9) und Bilder 1.15 und 1.16 (Seite 10) setzt sich dieses aus $n_I(t)$ und $n_Q(t)$ zusammen. Das ver-rauschte DSB-Signal $u_1(t)$ enthält (nur noch) das auf die Bandbreite des DSB-Signals begrenzte Rauschsignal $n_1(t)$, entsprechend zu Bild 1.17, Mitte der 2. Zeile (Seite 11).

$$u_1(t) = u_N(t) \cdot \cos(\Omega_C t) + n_1(t) = [u_N(t) + n_I(t)] \cos(\Omega_C t) + n_Q(t) \sin(\Omega_C t) \tag{2.12}$$

Die Umsetzung mit dem empfangsseitigen Hilfs-Träger ergibt:

$$u_1(t) \cdot 2 \cos(\Omega_C t) = \{ [u_N(t) + n_I(t)] \cos(\Omega_C t) + n_Q(t) \sin(\Omega_C t) \} \cdot 2 \cos(\Omega_C t) = [u_N(t) + n_I(t)] \cdot [1 + \cos(2\Omega_C t)] + n_Q(t) \cdot [0 + \sin(2\Omega_C t)] \tag{2.13}$$

Die Anteile auf der Frequenz $2\Omega_C$ werden vom Tiefpaß im Empfänger unterdrückt, so daß nur noch die Tiefpaß-Anteile übrig bleiben.

$$u_A(t) = u_N(t) + n_I(t) \quad \text{DSB-Demodulation} \tag{2.14}$$

Dem demodulierten DSB-Signal ist additiv nur das **In-Phase Rauschen** $n_I(t)$ überlagert. Dies ist unabhängig vom SNR am Eingang des Demodulators.

2.3.1 Signal-zu-Geräusch-Verhältnis der DSB

Das SNR der DSB wird für das Eingangssignal $u_1(t)$ des DSB-Demodulators gebildet und für sein Ausgangssignal $u_A(t)$.

Mit Gleichung (2.12) und Gleichung (2.8) wird für den **Eingang** des DSB-Demodulators:

$$P_{u_1} = \frac{1}{2} P_{u_N} + P_{n_1} \quad \rightsquigarrow \quad SNR_e = \left(\frac{S}{N} \right)_e = \frac{P_{u_N}}{2P_{n_1}} \tag{2.15}$$

Für den **Ausgang** des DSB-Demodulators wird, da $P_I = P_{n_1}$ ist:

$$P_{u_A} = P_{u_N} + P_{n_I} = P_{u_N} + P_{n_1} \quad \rightsquigarrow \quad SNR_o = \left(\frac{S}{N} \right)_o = \frac{P_{u_N}}{P_{n_1}} = \frac{P_{u_N}}{N_0 \omega_c / 2\pi} = \frac{P_{u_N}}{N_0 f_c} \tag{2.16}$$

Ein Vergleich des I/Q–Demodulators Bild 1.15 (Seite 10) mit dem Blockschaltbild der DSB–Übertragung zeigt ebenfalls, daß hinter dem DSB–Demodulator nur der In–Phase–Anteil $n_I(t)$ des äquivalenten TP–Rauschens auftritt. Dieser hat die gleiche Leistung wie das Rauschen $n_1(t)$.

- Das Signal–zu–Geräusch–Verhältnis der DSB nach der Demodulation SNR_o hat den gleichen Wert wie das der Basis–Band–Übertragung. Es ergibt sich insofern keine Verbesserung.
- Das SNR am Eingang des DSB–Demodulators SNR_e ist nur halb so groß wie SNR_o . Gegenüber dem HF–seitigen SNR ergibt sich eine Verbesserung von SNR_o um den Faktor 2, entsprechend zu Abschnitt 1.2.6 (Seite 8)

Die Spektrale Leistungs–Dichte (PSD) $S_1(\omega)$ des Eingangssignal $u_1(t)$ des DSB–Demodulators hinter dem Empfangs–BP und der Leistungs–Dichte $S_A(\omega)$ des demodulierten Signals $u_A(t)$ sind in Bild 2.5 dargestellt.

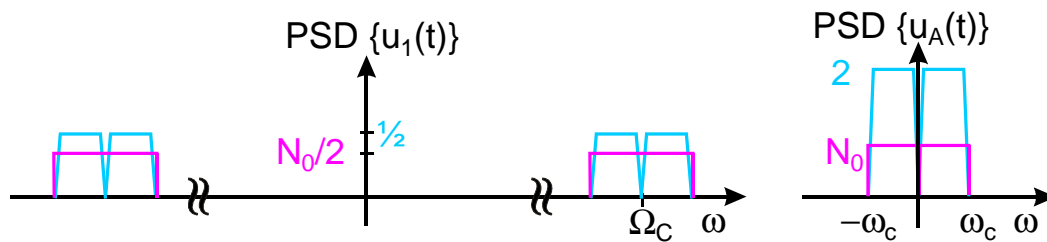


Bild 2.5: Leistungs–Dichte–Spektren im DSB–Empfänger

2.4 Einseitenband–Modulation (SSB) und Rauschen

Das Blockschaltbild einer SSB–Übertragung unterscheidet sich von demjenigen einer DSB–Übertragung i.w. nur dadurch, daß die Bandpässe im Sender und im Empfänger halb so breit sind wie bei DSB.

Bei der Einseitenband–Modulation wird das Spektrum des Nachrichten–Signals nur um den Wert der Träger–Frequenz Ω_C verschoben, ohne daß es zu einer Bandbreiten–Verdopplung des modulierten Signals kommt. Da das störende Rauschen „weiß“ sein soll, addiert es immer die gleiche Störleistung zum SSB–Spektrum, unabhängig davon, wohin dieses durch die Modulation und die Demodulation hingeschoben wird.

- Damit wird sofort einsichtig, daß die SSB–Übertragung das gleiche SNR erhält, wie eine Basisband–Übertragung. Das SNR am Eingang und am Ausgang des SSB–Demodulators sind daher ebenfalls identisch.

2.5 Amplituden–Modulation mit Träger (AM) und Rauschen

AM kann synchron oder asynchron durch Abtasten der Hüllkurve (Detektor) demoduliert werden. In der Regel wird AM asynchron demoduliert. Die synchrone Demodulation wird zum Vergleich mit betrachtet.

2.5.1 Synchrone Demodulation von AM

Synchrone Demodulation der AM ist fast identisch mit der Demodulation von DSB, mit Ausnahme, daß bei AM noch ein **zusätzlicher Träger** $U_C \cos(\Omega_C t)$ vorhanden ist. Für die synchrone Demodulation kann daher auch das Blockschaltbild der DSB (Bild 2.4) verwendet werden.

Als Spannung am **Demodulator–Eingang** erhält man jetzt:

$$u_1(t) = (U_C + u_N(t)) \cdot \cos(\Omega_C t) + n_1(t) \tag{2.17}$$

Da der Träger nach der Demodulation nur einen Gleich–Anteil liefert, der von der Nachricht abgetrennt wird,² erhält man als demoduliertes Signal dasselbe wie bei der DSB.

$$u_A(t) = u_N(t) + n_I(t) \quad \text{AM synchron} \tag{2.18}$$

Signal–Leistung P_{u_N} und Rausch–Leistung P_{n_1} ergeben sich daher wie bei der DSB.

²Dies geschieht durch die Kondensator–Kopplung im NF–Zweig.

Das empfangene Signal $u_1(t)$ enthält den Träger. Die Signal-Leistung (einschließlich Träger-Leistung P_C) P_N (Nutz-Leistung) am Eingang des Demodulators wird deshalb:

$$P_N = P_{u_1} - P_{n_1} = \frac{1}{2} \overline{(U_C + u_N(t))^2} = \overline{U_C^2} + \overline{u_N(t)^2} + 2U_C \overline{u_N(t)} \quad (2.19)$$

Da das Nachrichten-Signal $u_N(t)$ den Mittelwert Null hat (gleichanteils-frei), bleibt:

$$P_N = \overline{U_C^2} + \overline{u_N(t)^2} = P_C + P_{u_N} \quad \text{AM Nutz-Leistung} \quad (2.20)$$

Das Signal-zu-Geräusch-Verhältnis SNR_o am Ausgang des Demodulators wird:

$$SNR_o = \left(\frac{S}{N} \right)_o = \frac{P_{u_N}}{P_{n_1}} = \frac{P_{u_N}}{P_C + P_{u_N}} \cdot \frac{P_N}{P_{n_1}} = \frac{P_{u_N}}{P_C + P_{u_N}} \cdot \left(\frac{S}{N} \right)_e = \frac{P_{u_N}}{P_C + P_{u_N}} \cdot SNR_e \quad (2.21)$$

- Man kann daraus erkennen, daß das SNR bei AM **mindestens 3 dB schlechter** ist als bei DSB oder SSB. Da in der Praxis der Modulations-Grad deutlich kleiner als 1 ist, ist das SNR praktisch mindestens 6 dB schlechter.

Im AM-Rundfunk wird dies dadurch zu kompensieren versucht, daß das Nachrichten-Signal einer Dynamik-Kompression und einer Klippung der Spitzen-Amplituden unterworfen wird.

2.5.2 Hüllkurven-Demodulation bei großem SNR

Wegen der Hüllkurven-Demodulation wird die Rausch-Spannung $n_1(t)$ der Eingangs-Spannung $u_1(t)$ des Demodulators, Gleichung (2.17), in ihre Komponenten gemäß Gleichung (1.32) (Seite 9) aufgespalten.

$$u_1(t) = (U_C + u_N(t)) \cdot \cos(\Omega_C t) + n_1(t) = [U_C + u_N(t) + n_I(t)] \cdot \cos(\Omega_C t) + n_Q(t) \cdot \sin(\Omega_C t) \quad (2.22)$$

Das gewünschte Eingangssignal des Demodulators ist genau wie bei der synchronen Demodulation $(U_C + u_N(t)) \cdot \cos(\Omega_C t)$. Daher ist die Nutz-Leistung P_N identisch.

$$P_N = P_C + P_{u_N} \quad (2.23)$$

Um die **Hüllkurve** zu erhalten, muß Gleichung (2.22) in die **polare** Darstellung umgewandelt werden.

$$u_1(t) = a_1(t) \cos(\Omega_C t + \phi_1(t)); \quad a_1(t) = \sqrt{[U_C + u_N(t) + n_I(t)]^2 + n_Q(t)^2} \quad (2.24)$$

Für große Werte des SNR sind die Rausch-Spannungen klein und die Amplitude läßt sich näherungsweise angeben.

$$a_1(t) \approx U_C + u_N(t) + n_I(t) \quad (2.25)$$

Die Gleichkomponente U_C wird durch Kondensator-Kopplung abgetrennt, so daß sich ab hier die gleichen Verhältnisse ergeben, wie bei der synchronen Demodulation der AM.

$$u_A(t) \approx u_N(t) + n_I(t) \quad \text{AM asynchron; SNR groß} \quad (2.26)$$

- Bei großem SNR ist die Hüllkurven-Demodulation von AM praktisch gleich wie eine synchrone Demodulation von AM.

Dies erkennt man auch aus dem Zeigerbild für die verrauschte AM, Bild 2.6, links (Seite 18). Wie man sieht, ist die Größe von $a_1(t)$ von $n_Q(t)$ fast unabhängig.

2.5.3 Hüllkurven-Demodulation bei kleinem SNR

Bei diesem Fall ist $n_1(t) \gg U_C + u_N(t)$, Bild 2.6, rechts. Damit ergibt sich nun die Näherung für die Hüllkurve der AM:

$$u_A(t) = a_1(t) \approx n_1(t) + \{U_C + u_N(t)\} \cos(\varphi_n) \quad \text{AM asynchron; SNR klein} \quad (2.27)$$

Die Nachrichten-Spannung $u_N(t)$ ist bei kleinem SNR multiplikativ verknüpft mit dem Cosinus φ_n des Rauschens. Dieses Produkt unterscheidet sich bezüglich der Verständlichkeit nur wenig vom Rauschen selbst, so

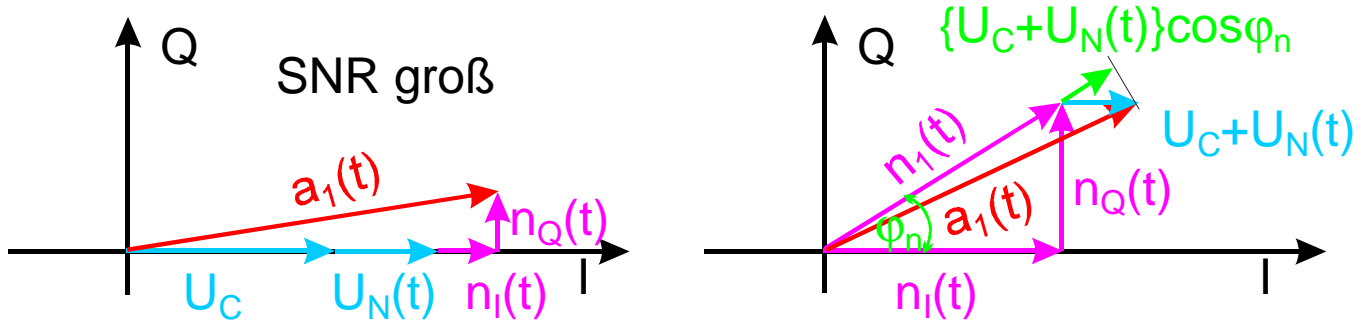


Bild 2.6: Zeiger-Diagramm der AM für großes SNR und kleines SNR

daß der Hüllkurven-Demodulator bei kleinem SNR kein brauchbares Ausgangs-Signal liefert, zumal ja auch noch das Rauschen $n_1(t)$ selbst im Ausgangs-Signal enthalten ist.

Aufgrund dieses Verhaltens hat der Hüllkurven-Demodulator eine Schwelle, ab der das Geräusch im demodulierten Signal überproportional ansteigt, was sich an der entsprechenden Abnahme des SNR am Ausgang (SNR_o) zeigt, Bild 2.7.

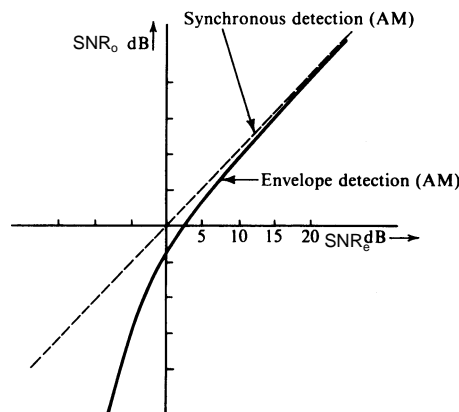


Bild 2.7: SNR der AM für synchrone und Hüllkurven-Demodulation

Die Schwelle wird i.a. da angenommen, wo der Kurven-Verlauf um 1 dB vom linearen Verlauf abweicht, also bei $SNR_e \approx 10dB$. Für eine annehmbare Empfangs-Qualität bei AM sollte jedoch $SNR_e \approx 30dB$ sein.

3 Winkel-Modulation und Rauschen

3.1 Verwandtschaft von FM und PM

Das Modell für eine FM bzw. PM Übertragung ist in Bild 3.1 (Seite 19) dargestellt.

Am Ausgang des Senders steht die winkel-modulierte Schwingung $u_T(t)$ zur Verfügung.

$$u_T(t) = U_C \cos[\Omega_C t + \varphi(t)] \quad \text{FM / PM Signal} \quad (3.1)$$

Der Phasenwinkel $\varphi(t)$ der Träger-Schwingung wird durch das Nachrichten-Signal $u_N(t)$ beeinflusst. Bei der PM ergibt sich ein proportionaler Zusammenhang.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= k_{PM} \cdot u_N(t) && \text{PM Modulator} \\ \varphi(t) &= k_{FM} \int_0^t u_N(\tau) d\tau && \text{FM Modulator} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Für das demodulierte Ausgangs-Signal $u_A(t)$ ergibt sich für die PM wieder ein proportionaler Zusammenhang, wobei K_{DFM} die Demodulator-Konstante ist.

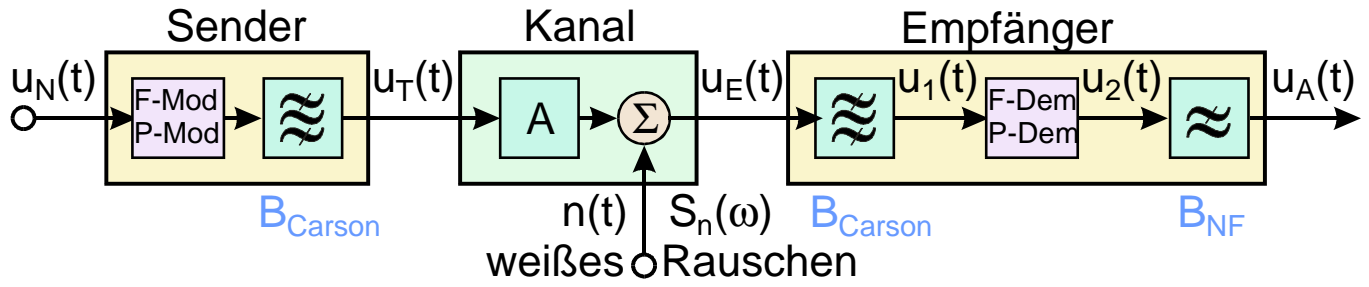


Bild 3.1: Blockschaltbild einer FM/PM-Übertragung

$$\begin{aligned}
 u_A(t) &= K_{D_{PM}} \cdot \varphi(t) && \text{PM Demodulator} \\
 u_A(t) &= K_{D_{FM}} \frac{d\varphi(t)}{dt} && \text{FM Demodulator}
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Aus den Gleichungen (3.2) und (3.3) geht der Zusammenhang zwischen PM und FM hervor. Danach kann ein FM-Modulator als PM-Modulator mit vorgeschaltetem Integrierer und ein FM-Demodulator als PM-Demodulator mit nachfolgendem Differenzierer aufgefaßt werden, Bild 3.2.

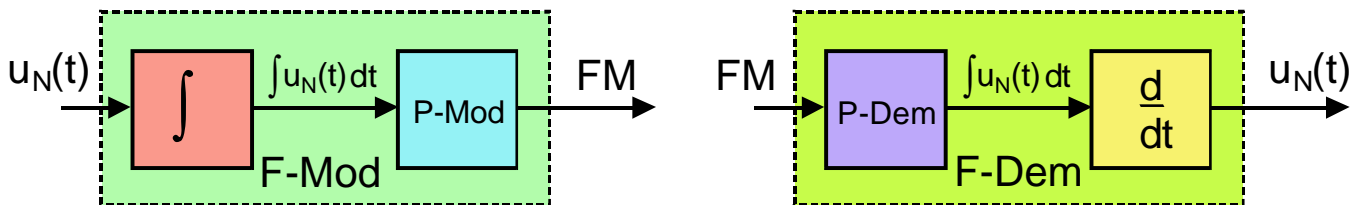


Bild 3.2: Modulation und Demodulation von FM mit Phasen-Modulator und -Demodulator

Die FM Modulator-Konstante folgt aus der PM Modulator-Konstanten.

$$k_{FM} = \frac{1}{T_i} k_{PM}; \quad T_i : \text{Zeitkonstante des Integrierers}
 \tag{3.4}$$

Entsprechendes gilt für den FM-Demodulator.

$$K_{D_{FM}} = T_d K_{D_{PM}}; \quad T_d : \text{Zeitkonstante des Differenzierers}
 \tag{3.5}$$

Werden die beiden Zeitkonstanten gleich gewählt $T_i = T_d = T$, heben sie sich für die gesamte Übertragung wieder weg.

$$k_{FM} \cdot K_{D_{FM}} = \frac{1}{T_i} k_{PM} \cdot T_d K_{D_{PM}} = k_{PM} \cdot K_{D_{PM}}
 \tag{3.6}$$

Aufgrund dieser Verwandtschaft zwischen PM und FM können die Ergebnisse für die PM anschließend auf die FM übertragen werden.

3.1.1 Die Carson-Bandbreite

Die Bandbreite B_{Carson} im Hochfrequenz-Zweig wird entsprechend zur Näherung nach Carson gewählt.

$$B_{Carson}(\omega) = 2[\Delta\Omega + B_{NF}(\omega)] \quad \text{Carson-Bandbreite} \quad \Delta\Omega : \text{Frequenz-Hub}
 \tag{3.7}$$

Mit dieser Bandbreite ist gewährleistet, daß alle wesentlichen Spektral-Anteile der FM bzw. PM den Demodulator erreichen.

$$\Delta\Omega = k_{FM} \cdot |u_N(t)|_{\max} = k_{PM} \cdot \left| \frac{d}{dt} u_N(t) \right|_{\max} \quad \text{Frequenz-Hub}
 \tag{3.8}$$

3.1.2 Das Empfangs-Signal

Die Eingangs-Spannung $u_E(t)$ des Empfängers setzt sich aus dem winkel-modulierten Signal $A \cdot u_T(t)$ und der Schmalband-Rauschspannung $n(t)$ zusammen.

$$u_E(t) = A \cdot u_T(t) + n(t) = AU_C \cos[\Omega_C t + \varphi(t)] + n(t) \quad \text{Empfangs-Spannung} \quad (3.9)$$

Die Nutz-Leistung des FM-Signals P_1 (Träger-Leistung $C = P_1$) am Eingang des Demodulators ist nur von der Amplitude AU_C des (empfangenen) FM-Signals abhängig.

$$P_1 = C = \frac{(AU_C)^2}{2} \quad \text{HF Nutz-Leistung} \quad (3.10)$$

Mit der Rausch-Spannung $n(t)$ (Gleichung (1.32), Seite 9)

$$n(t) = a_n(t) \cdot \cos[\Omega_C t + \theta(t)] = n_I(t) \cdot \cos(\Omega_C t) - n_Q(t) \cdot \sin(\Omega_C t) \quad \text{Schmalband-Rauschen}$$

folgt für die (verrauschte) Empfangs-Spannung:

$$u_E(t) = A \cdot U_C \cos[\Omega_C t + \varphi(t)] + a_n(t) \cdot \cos[\Omega_C t + \theta(t)] \quad \text{Winkel-Modulation + Rauschen} \quad (3.11)$$

3.2 Phasen-Modulation und Rauschen

Wie im Zeigerbild der WM, Bild 3.3, dargestellt ist, läßt sich Gleichung (3.11) zusammenfassen.

$$u_E(t) = a(t) \cos[\Omega_C t + \varphi(t) + \Psi(t)] \quad \text{verraushtes WM-Signal} \quad (3.12)$$

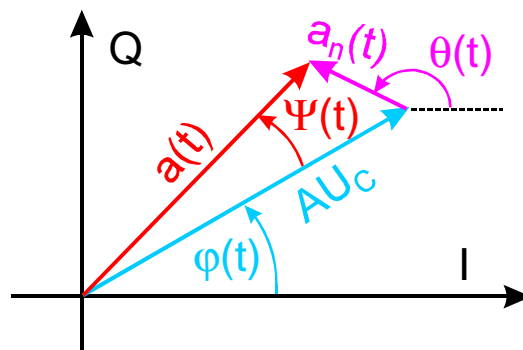


Bild 3.3: Zeiger-Diagramm der Winkel-Modulation mit Rauschen

Aus dem Zeigerdiagramm, Bild 3.3, läßt sich der Stör-Winkel $\Psi(t)$ bestimmen.

$$\Psi(t) = \arctan \left\{ \frac{a_n(t) \sin[\theta(t) - \varphi(t)]}{AU_C + a_n(t) \cos[\theta(t) - \varphi(t)]} \right\} \quad \text{Stör-Winkel} \quad (3.13)$$

- Ein **idealer Demodulator** für Winkel-Modulationen wertet zur Gewinnung des demodulierten Signals $u_A(t)$ nur die **Änderung des (gesamten) Phasenwinkels** $(\varphi(t) + \Psi(t))$ aus.¹

Gleichung (3.13) zeigt, daß für $\Psi(t)$ — und damit auch für $u_A(t)$ — ein **nichtlinear Zusammenhang** zwischen dem Nachrichten-Signal und dem Rauschen besteht. Eine exakte Analyse winkelmodulierter Signale ist daher kompliziert.

Zur Auswertung von Gleichung (3.13) sind daher **Vereinfachungen** erforderlich.

¹In der Praxis erreicht man das dadurch, daß die Schwankungen der Amplitude $a(t)$ mit Hilfe eines Begrenzer-Verstärkers beseitigt werden.

1. Das **SNR am Eingang des Demodulators** SNR_e **sei groß**, so daß $|a_n(t)| \ll AU_C$ gilt. Dadurch vereinfacht sich der Nenner.

2. Die Störleistung am Ausgang des Demodulators wird für $u_N(t) = 0$ bestimmt, also in den Modulationspausen: **Nachrichten-Spannung ist 0**. Damit wird $\varphi(t) = 0$ gesetzt.

Weil $\Psi(t)$ nach Gleichung (3.13) auch von $u_N(t)$ bzw. $\varphi(t)$ abhängt, erhält man nicht ganz die korrekte Störleistung, aber der Unterschied ist tolerierbar. Dies läßt sich folgendermaßen begründen.

- Bei (breitbandiger) Winkel-Modulation ist das Rauschen entsprechend zur Carson-Bandbreite B_{Carson} breit, wodurch eine schnelle zeitliche Änderung des Rauschens im Zeitbereich resultiert. Dagegen ist die Nachricht $u_N(t)$ mit der Bandbreite B_{NF} eine zeitlich sich langsam ändernde Größe. Daher ist der Unterschied (pro Zeitintervall) zwischen einem winkel-modulierten Signal und einem unmodulierten Träger gering.

3. Mit $\varphi(t) = 0$ wird

$$a_n(t) \cos[\theta(t)] = n_I(t); \quad a_n(t) \sin[\theta(t)] = n_Q(t) \quad (3.14)$$

Mit diesen Vereinfachungen wird der Ausdruck für den Stör-Winkel $\Psi(t)$:

$$\Psi(t)|_{\varphi(t)=0} \approx \arctan \left\{ \frac{n_Q(t)}{AU_C + n_I(t)} \right\} \approx \frac{n_Q(t)}{AU_C} \quad \text{Stör-Winkel-Modulation} \quad (3.15)$$

Der Stör-Winkel $\Psi(t)$ verursacht eine entsprechende Störung im demodulierten Signal $u_2(t)$.

$$u_2(t) = K_{DPM} \cdot [\varphi(t) + \Psi(t)] \quad \text{PM Demodulator} \quad (3.16)$$

Für die gesamte Übertragungs-Strecke erhält man daraus mit Gleichung (3.2):

$$u_A(t) \approx K_{DPM} k_{PM} u_N(t) + \frac{K_{DPM}}{AU_C} n_Q(t) \Big|_{u_N(t)=0} \quad \text{PM} \quad (3.17)$$

Die Werte für die Störungen gelten wegen den getroffenen Vereinfachungen nur für $u_N(t) = 0$.

Das demoduierte Nachrichten-Signal $u_A(t)$ wird vom Tiefpaß des Demodulators vollständig durchgelassen. Die Signal-Leistung P_{u_A} wird dann:

$$P_{u_A} = [K_{DPM} k_{PM}]^2 P_{u_N} \quad \text{NF Signal-Leistung für PM} \quad (3.18)$$

Während die Bandbreite des **Nutz-Signals** von der Carson-Bandbreite $B_{\text{Carson}}(\omega)$ als Winkel-moduliertes Signal auf die Bandbreite $B_{\text{NF}}(\omega)$ als demoduliertes Signal „schrumpft“ und dabei aber die Signal-Leistung erhalten bleibt, trifft dieser Effekt für das Rauschen nicht zu. Für die Rauschleistung kommt somit weniger im demodulierten Signal an, als was am Eingang des Demodulators voranden war. Das ist günstig, weil sich dadurch eine Verbesserung des SNR_o ergibt.

3.2.1 Die Stör-Leistungen

Die Stör-Leistungen P_{n_1} hinter dem Eingangs-Bandfilter mit der Bandbreite $B_{\text{Carson}}(\omega)$, also vor dem FM- bzw. PM-Demodulator, sind für FM und PM gleich. Diese Stör-Leistungen werden um so größer, je größer der Frequenz-Hub $\Delta\Omega$ wird und damit die erforderliche Bandbreite $B_{\text{Carson}}(\omega)$ gewählt werden muß.

$$P_{n_1} = N_0 \cdot B_{\text{Carson}}(\omega) \quad \text{Stör-Leistung vor dem Demodulator} \quad (3.19)$$

Für die PM ergibt sich aus Gleichung (3.17) die spektrale Leistungs-Dichte der Störung $S_{n_2}(\omega)$ des Signals $u_2(t)$ hinter dem Demodulator und vor dem Tiefpaß zu:

$$S_{n_2}(\omega) = \left\{ \frac{K_{DPM}}{AU_C} \right\}^2 S_Q(\omega) \quad \text{Stör-Leistungs-Dichte PM} \quad (3.20)$$

Die Rauschleistung P_{n_A} im Ausgangs-Signal $u_A(t)$ wird proportional zur Bandbreite $B_{\text{NF}}(\omega)$, Bild 3.4 (mitte).

$$P_{n_A} = \left\{ \frac{K_{DPM}}{AU_C} \right\}^2 N_0 \cdot 2B_{\text{NF}}(\omega) \quad \text{Rausch-Leistung PM} \quad (3.21)$$

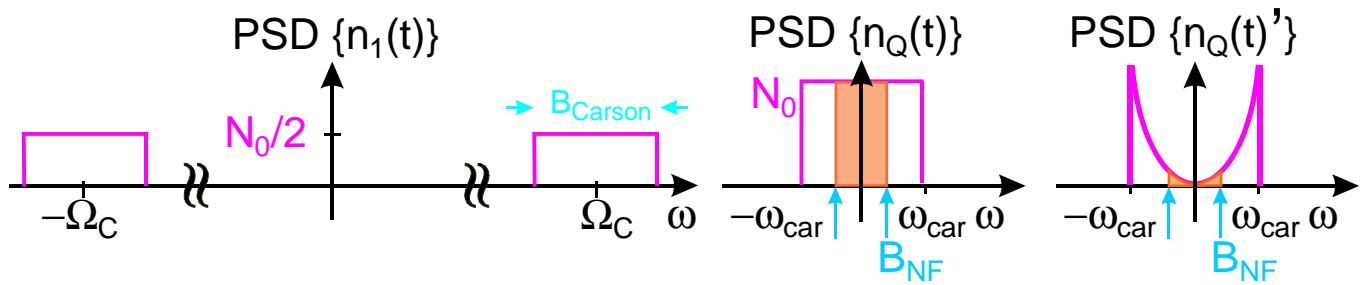


Bild 3.4: Rausch-Leistungs-Dichten bei PM (mitte) und FM (rechts)

3.2.2 Das SNR von PM

Für den Eingang des PM-Demodulators bestimmt sich das SNR aus der HF-Nutz-Leistung (Träger-Leistung C) Gleichung (3.10) und der Rausch-Stör-Leistung vor dem Demodulator, Gleichung (3.19).

$$SNR_e = \left(\frac{C}{N}\right)_e = \frac{P_1}{P_{n_1}} = \frac{(AU_C)^2}{2N_0 \cdot B_{Carson}(\omega)} \quad \text{SNR vor der Demodulation PM} \quad (3.22)$$

Das Signal-zu-Stör-Verhältnis nach der Demodulation SNR_o gewinnt man aus den Gleichungen (3.18) und (3.21).

$$SNR_o = \frac{P_{u_A}}{P_{n_A}} = \frac{[K_{DPM} k_{PM}]^2 P_{u_N}}{\left\{\frac{K_{DPM}}{AU_C}\right\}^2 N_0 \cdot 2B_{NF}(\omega)} = \frac{[k_{PM}]^2 P_{u_N} (AU_C)^2}{2N_0 \cdot B_{Carson}(\omega)} \cdot \frac{B_{Carson}(\omega)}{B_{NF}(\omega)} \quad (3.23)$$

$$\sim \left(\frac{S}{N}\right)_o = [k_{PM}]^2 P_{u_N} \frac{B_{Carson}(\omega)}{B_{NF}(\omega)} \cdot SNR_e \quad \text{SNR nach der Demodulation PM}$$

Das SNR_o kann über das Verhältnis von Carson-Bandbreite zu NF-Bandbreite beeinflusst werden, Bild 3.4 (mitte).

$$\frac{SNR_o}{SNR_e} \sim \frac{B_{Carson}(\omega)}{B_{NF}(\omega)} = \frac{2[\Delta\Omega + B_{NF}(\omega)]}{B_{NF}(\omega)} \quad \text{SNR Verbesserung PM} \quad (3.24)$$

Gleichung (3.24) erweckt den Eindruck, daß sich durch eine Vergrößerung des Frequenz-Hubes $\Delta\Omega$ das SNR nach der Demodulation beliebig vergrößern ließe. Das trifft nicht zu, da mit größerer Carson-Bandbreite das eingangsseitige SNR verringert wird, so daß die o.g. Annahme nicht mehr zutrifft, wonach das eingangsseitige SNR groß sein muß, damit die Vereinfachungen in der Berechnung zulässig waren. Tatsächlich kommt man durch die Vergrößerung des Hubes $\Delta\Omega$ schließlich an eine Schwelle (FM-Schwelle), ab der das ausgangsseitige SNR rapide abnimmt.

3.3 Frequenz-Modulation und Rauschen

Die FM wird entsprechend zu Bild 3.2 (Seite 19) als PM mit einer **Integration** (Höhen-Absenkung) des Nachrichten-Signals vor dem PM-Modulator und einer **Differentiation** (Höhen-Anhebung) des demodulierten Nachrichten-Signals hinter dem PM-Demodulator betrachtet. Die Zeitkonstanten T des Integrierers und des Differenzierers seien identisch.

- Bezogen auf das Nachrichten-Signal $u_N(t)$ ergibt sich somit keine Änderung bezüglich der Empfangs-Leistung P_{u_A} [Gleichung (3.18)] gegenüber der PM.
- Die HF-Nutz-Leistung P_1 [Gleichung (3.10)] ändert sich ebenfalls nicht, weil der Empfangs-Bandpaß die Carson-Bandbreite hat und damit die gesamte Nutz-Leistung am Eingang des Demodulators zur Verfügung steht.
- Die Stör-Leistung vor dem Demodulator P_{n_1} [Gleichung (3.19)] ist infolge der Carson-Bandbreite ebenfalls gleich wie bei der PM.

- Die einzige **Änderung** betrifft die **demodulierte Stör-Spannung**. Diese durchläuft (nur) den ausgangseitigen Differenzierer, Bild 3.2.

Gemäß Bild 3.2 besteht die Störspannung am Ausgang des FM-Demodulators aus der (zeitlichen) Ableitung der Rausch-Spannung $u_Q(t)$. Mit dem Zeit-Differentiations-Satz der Fourier-Transformation erhält man:²

$$g(t) = \frac{d}{dt}f(t) \quad \circ \bullet \quad j\omega \cdot F(\omega) = G(\omega) \quad \text{Zeit-Differentiation} \quad (3.25)$$

Der im FM-Demodulator implizit enthaltene Differenzierer hat somit die Übertragungsfunktion:

$$H_D(\omega) = j\omega T \quad (3.26)$$

Für die Stör-Leistungs-Dichte (PSD) $S_{n_2}(\omega)$ am Ausgang des Differenzierers folgt daraus ein **parabel-förmiger** Verlauf, Bild 3.4 (rechts).

$$S_{n_2}(\omega) = \left\{ \frac{K_{DFM}}{AU_C} \right\}^2 \cdot |H_D(\omega)|^2 S_Q(\omega) = \left\{ \frac{K_{DFM}}{AU_C} \right\}^2 \cdot (\omega T)^2 S_Q(\omega) \quad \text{Stör-Leistungs-Dichte FM} \quad (3.27)$$

Die Rauschleistung P_{n_A} im Ausgangs-Signal $u_A(t)$ erhält man bei FM mit einer Integration über $S_{n_2}(\omega)$ mit den Grenzen $\pm B_{NF}(\omega)$.

$$P_{n_A} = \left\{ \frac{K_{DFM} T}{AU_C} \right\}^2 \cdot N_0 \cdot \frac{2}{3} B_{NF}^3(\omega) \quad \text{Rausch-Leistung FM} \quad (3.28)$$

3.3.1 Das SNR von FM

Am Eingang des Demodulators besteht keine Änderung gegenüber der PM, denn die Träger-Leistung $C = P_1$ ist dieselbe. Also ändert sich auch das SNR_e nicht.

$$SNR_e = \left(\frac{C}{N} \right)_e = \frac{P_1}{P_{n_1}} = \frac{(AU_C)^2}{2N_0 \cdot B_{Carson}(\omega)} \quad \text{SNR vor der Demodulation FM} \quad (3.29)$$

Die Störleistung P_{n_A} der FM nach dem Differenzierglied wird in das Verhältnis gesetzt zur Signalleistung P_{u_A} des Ausgangs-Signals, woraus sich das SNR_o der FM ergibt.

$$\begin{aligned} SNR_o = \frac{P_{u_A}}{P_{n_A}} &= \frac{[K_{DFM} k_{PM}]^2 P_{u_N}}{\left\{ \frac{K_{DFM}}{AU_C} \right\}^2 N_0 \cdot 2 \frac{B_{NF}^3(\omega)}{3}} = 3 \frac{[k_{FM}/T]^2 P_{u_N} (AU_C)^2}{2N_0 \cdot B_{Carson}(\omega)} \cdot \frac{B_{Carson}(\omega)}{B_{NF}^2(\omega)} \\ &\rightsquigarrow \left(\frac{S}{N} \right)_o = 3 [k_{FM}/T]^2 P_{u_N} \frac{B_{Carson}(\omega)}{B_{NF}^2(\omega)} \cdot SNR_e \quad \text{SNR nach der Demodulation FM} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Das SNR_o kann über das Verhältnis von Carson-Bandbreite zu NF-Bandbreite beeinflusst werden, Bild 3.4 (rechts).

$$\frac{SNR_o}{SNR_e} \sim \frac{B_{Carson}(\omega)}{B_{NF}^2(\omega)} = \frac{2[\Delta\Omega + B_{NF}(\omega)]}{B_{NF}^2(\omega)} \quad \text{SNR Verbesserung FM} \quad (3.31)$$

Wie bei der PM gilt auch bei der FM, daß diese Verbesserung des SNR_o nur dann möglich ist, wenn (gemäß Voraussetzung) das SNR_e groß ist. Die bei der Vergrößerung des Frequenz-Hubes $\Delta\Omega$ auftretende FM-Schwelle wird in Abschnitt 3.4 betrachtet.

²Siehe „Die Fourier-Transformation und ihre Anwendungen“ Teil 3.

3.3.2 FM mit Pre-Emphase und De-Emphase

Das Rauschen im demodulierten Signal ist bei FM sehr klein für tiefe NF-Frequenzen, wie man aus der Spektralen Leistungs-Dichte (PSD) der Rausch-Spannung sieht, Bild 3.4 (rechts).

Andererseits sind die höheren Frequenz-Anteile des Empfang-Signals dagegen stärker verrauscht. Dies ist besonders störend bei analoger Übertragung, weil aufgrund der Eigenschaften des Ohrs, höherfrequente Rauschteile lauter wahrgenommen werden.

Um diese Störung zu vermindern, wird bei analoger FM im Sender eine Höhenanhebung (Pre-Emphase) für das Nachrichten-Signal vorgenommen, Bild 3.5 (links). Nach dem Demodulator wird eine entsprechende Höhen-Absenkung (De-Emphase) vorgenommen, Bild 3.5 (rechts). Das Nachrichten-Signal wird dadurch frequenz-eben übertragen, aber das Störgeräusch nach der FM-Demodulation wird dadurch vermindert.

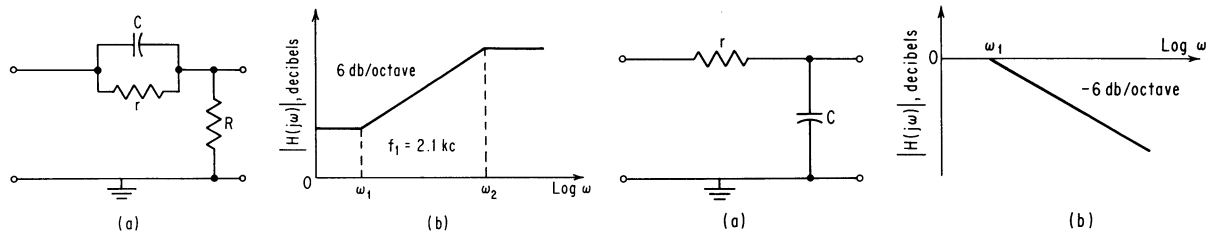


Bild 3.5: Pre-Emphase Schaltung und Bode-Diagramm (links); De-Emphase Schaltung und Bode-Diagramm (rechts)

Im UKW-FM Rundfunk sind unterschiedliche Zeitkonstanten τ üblich, je nach Region.

$$\tau = 50\mu\text{sec} \text{ Europa ; } \tau = 75\mu\text{sec} \text{ USA} \tag{3.32}$$

Die Grenz-Frequenzen (3 dB), ab wo eine Höhen-Anhebung einsetzt, sind demnach:

$$\tau = 50\mu\text{sec} \rightsquigarrow f_g = 3,183\text{KHz}; \quad \tau = 75\mu\text{sec} \rightsquigarrow f_g = 2,1\text{KHz} \tag{3.33}$$

Das Bode-Diagramm zur Pre-Emphasis und die resultierende Geräusch-Amplitude zeigt Bild 3.6.

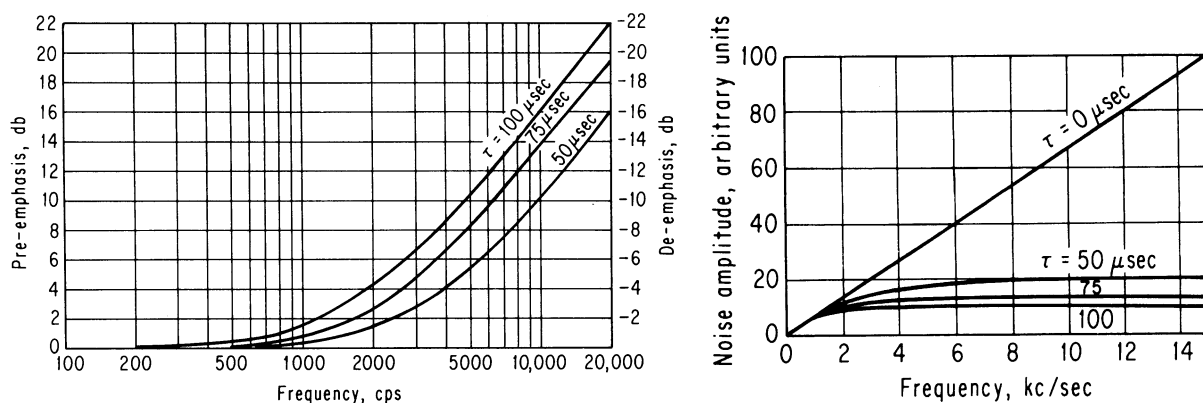


Bild 3.6: Bode-Diagramm der Pre-Emphasis-Schaltung (links); Reduktion der Geräusch-Spannung durch Pre-Emphase/De-Emphase (rechts)

3.4 Schwellen-Effekt

Deutlich sieht man den Schwellen-Effekt, wenn man die gestörte FM als Zeigerdiagramm darstellt, Bild 3.7.

Ein (idealer) FM-Demodulator wertet nur den resultierenden Winkel $\Theta_{\text{res}}(t)$ für die Demodulation aus.

- Für SNR **groß** ist $\Theta_{\text{res}}(t) \approx \varphi(t)$: Das demodulierte Signal ist „Musik mit Rauschen-Hintergrund“.

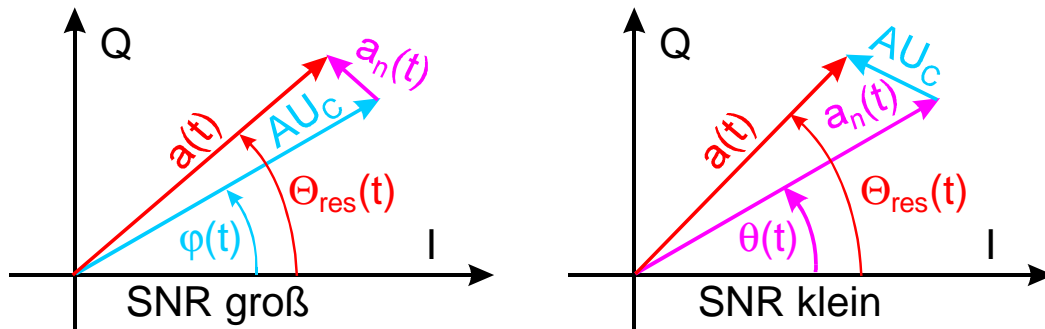


Bild 3.7: Zeiger-Diagramm der FM bei großem SNR (links) und kleinem SNR (rechts)

- Für SNR **klein** ist $\Theta_{res}(t) \approx \theta(t)$: Das demodulierte Signal ist „Rauschen mit Musik-Hintergrund“.
- Aufgrund von Mehrwege-Ausbreitung (Echos) kann es für das FM-Signal zu Löschungen kommen, so daß dann das SNR (sehr) klein wird.
- Typisch für eine FM-Übertragung ist, daß das stärkere Signal dominiert. Dieser Schwellen-Effekt wird mit **Capture-Effekt** bezeichnet. Die Modulation des schwächeren FM-Signals wird dann im Ausgangs-Signal um 30 dB unterdrückt.
Der Capture-Effekt tritt auch auf, wenn 2 (unterschiedliche) FM-Sender gleichzeitig empfangen werden. Man hört jeweils das Programm des stärker ankommenden Senders. Das kann sich z.B. im Auto mehrfach ändern, so daß der Empfänger (scheinbar) zwischen verschiedenen Programmen springt.
- Gute FM-Empfänger haben ein Capture-Ratio (Capture-Schwelle) von $CR \leq 0.5$ dB. Dieser Wert hängt ab von den Eigenschaften des Begrenzer-Verstärkers und des Diskriminators.
- Eine kleines Capture-Ratio ist Voraussetzung für einen weitestgehend Störungs-freien FM-Empfang.

Den **Schwellen-Effekt** sieht man deutlich, wenn die Ortskurven der Spitze des resultierenden Zeigers (Vektor-Diagramm) betrachtet werden, Bild 3.8.

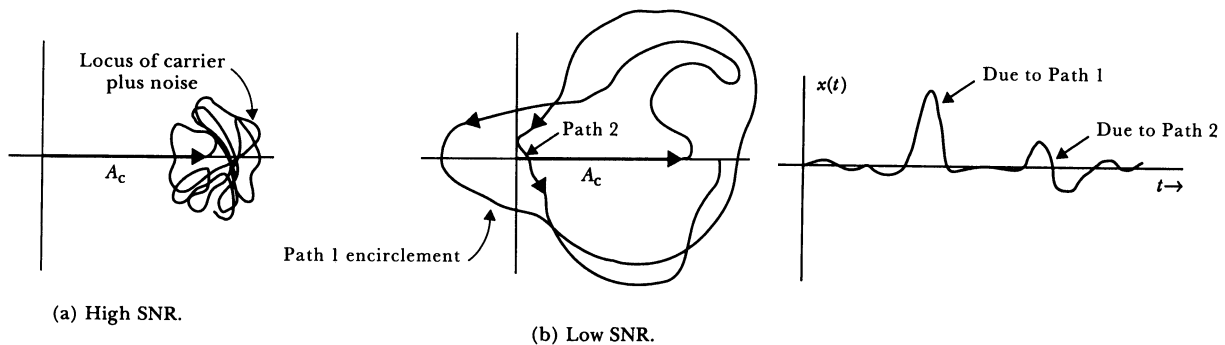


Bild 3.8: Ortskurve der FM bei großem SNR (links) und kleinem SNR (mitte); Klicks im Ausgangs-Signal bei kleinem SNR (rechts)

In diesem Bild ist unterstellt, daß das Nachrichten-Signal $u_N(t) = 0$ ist (Modulations-Pause). Man erkennt, daß die Störungen durch das Rauschen dann besonders groß werden, wenn die FM-Ortskurve den Nullpunkt umschließt (Pfad 1), weil dann eine Phasen-Änderung von 2π erfolgt. Dies führt auf die „Klicks“ im demodulierten Signal. Auch eine Annäherung an den Nullpunkt (Pfad 2) führt auf Störungen. Diese treten im Ausgangs-Signal weniger stark in Erscheinung, da sie mehr höher-frequente Spektralanteile besitzen und diese aber vom Tiefpaß am Ausgang des Demodulators unterdrückt werden.

- Die FM-Schwelle, ab der die Störungen überwiegen, ist näherungsweise dann erreicht, wenn der Effektiv-Wert (Streuung σ , Bild 1.3, Seite 3) des Rauschens $1/3$ der Amplitude der empfangenen FM-Schwingung beträgt.

Bild 3.9 zeigt den typischen Verlauf des SNR bei FM und die (beiden) FM-Schwellen. Für größeren Modulations-Index $\beta = \Delta\Omega/B_{NF}$ verbessert sich das SNR nach der Demodulation, jedoch verschiebt sich auch die (erste) FM-Schwelle zu höheren Werten von $(\frac{C}{N})_e$. Zum Vergleich ist auch die Kurve für die DSB angegeben (synchrone Demodulation).

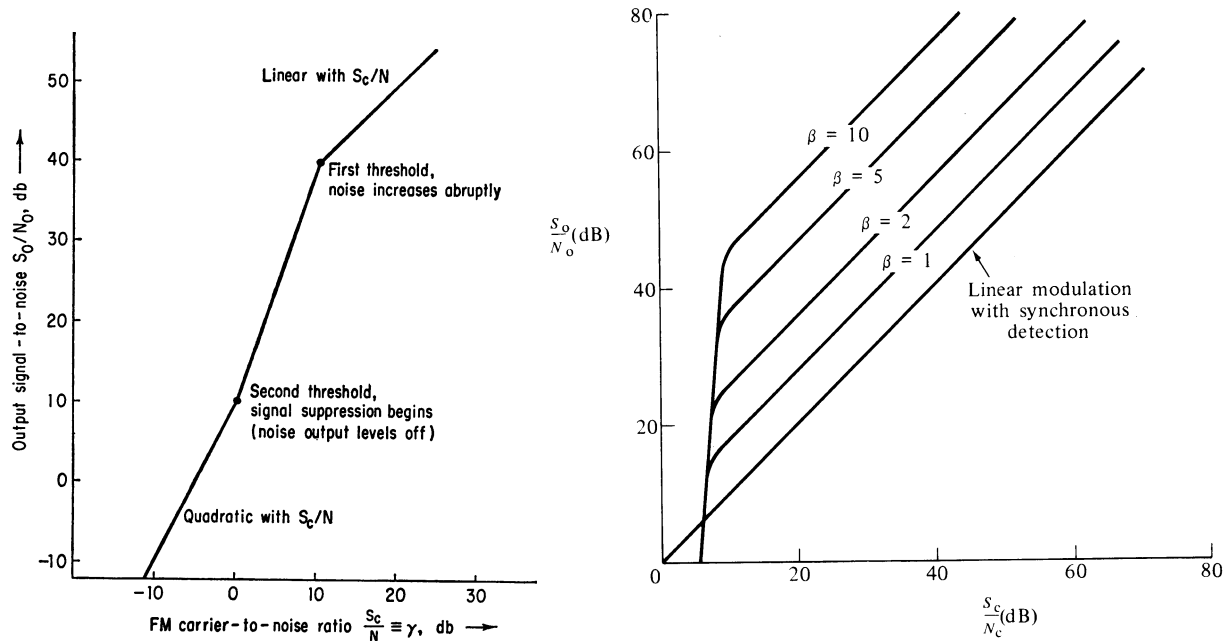


Bild 3.9: Typischer Verlauf des SNR & Schwellen bei FM

Literatur

- [1] o.N.: *Transmission Systems for Communications*, 4th ed. revised, Bell Telephone Laboratories, 1971
- [2] Sheingold, D.H.: *Analog Devices: Analog-Digital Conversion Handbook*, Prentice-Hall, 1986
- [3] Shanmugam, K.S.: *Digital and Analog Communication Systems*, Wiley, 1979
- [4] Hambley, A.R.: *Introduction to Communication Systems*, Computer Science Press, 1990
- [5] Lathi, B.P.: *Modern Digital and Analog Communication Systems*, Holt-Saunders, 1983
- [6] Haykin, S.: *Communication Systems*, Wiley, 4th ed., 2001
- [7] Panter, P.F.: *Modulation, Noise, and Spectral Analysis*, McGraw Hill, 1965
- [8] Schwartz, M.; Bennett, W.R.; Stein, S.: *Communication Systems and Techniques*, McGraw Hill, 1966
- [9] Kammeyer, K.D.; Kühn, V.: *MATLAB in der Nachrichtentechnik*, Schlembach, 2001
- [10] Kammeyer, K.D.: *Nachrichten-Übertragung*, Teubner, 3.A., 2004
- [11] Taub, H.; Schilling, D.L.: *Principles of Communication Systems*, McGraw-Hill, 2nd ed. 4th pr., 1989
- [12] Couch II, L.W.: *Digital and Analog Communication Systems*, McMillan, 4th ed., 1993
- [13] Tibbs, C.E.; Johnstone, G.G.: *Frequency Modulation Engineering*, Chapman & Hall, 1956
- [14] Stremler, F.G.: *Introduction to Communication Systems*, Addison Wesley, 3rd ed., 1990