

# Winkel-Modulationen

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Die Winkelmodulation im Zeitbereich</b>	<b>1</b>
1.1 Eingriff in den Winkel des Hochfrequenzträgers	1
1.1.1 Beeinflussung des Winkels $\varphi(t)$	2
1.2 Verwandtschaft von Phasen- und Frequenzmodulation	2
1.2.1 Phasenmodulation	3
1.2.2 Frequenzmodulation	3
1.2.3 Zur meßtechnischen Bestimmung der Modulatorkonstanten	3
1.2.4 Phasenmodulation mit einem Frequenzmodulator	3
1.2.5 Erzeugung von FM mit einem Phasenmodulator	4
<b>2 Modulation und Demodulation von PM und FM</b>	<b>5</b>
2.1 Erzeugung von Phasenmodulation	5
2.1.1 Demodulation einer Phasenmodulation	6
2.2 Erzeugung einer Frequenzmodulation	6
2.2.1 Demodulation einer Frequenzmodulation	7
2.3 Signalaufbereitung für FM-Systeme mit analogem Nachrichtensignal	7
2.4 I/Q Phasenmodulator	9
2.4.1 Schmalband Phasen-Modulator	9
<b>3 Spektren winkelmodulierter Schwingungen</b>	<b>10</b>
3.1 Die „Momentan“-Frequenz	11
3.1.1 Der Frequenz-Hub	11
3.2 Spektrum der Schmalband-Modulationen	12
3.2.1 Bandbreite der Schmalband-WM	12
3.2.2 Digitale Anwendungen der Schmalband-FM	13
3.3 Breitband-Frequenzmodulation	14
3.3.1 Breitband-FM mit tieffrequentem Nachrichtensignal	14
3.3.2 HF-Bandbreite der Breitband-FM	14
3.3.3 Beispiel 1: FM-Spektrum für Cos-förmiges Nachrichtensignal	15
3.3.4 Beispiel 2: FM-Spektrum für Sägezahnförmiges Nachrichtensignal	16
3.3.5 Spektralverteilung und Bandbreite des FM-Spektrums für den allgemeinen Fall des Nachrichtensignals	16
3.3.6 FM-Bandbreite mit der Carson-Formel	17
<b>4 Klassische Analyse der FM</b>	<b>19</b>
4.1 Das FM-Signal im Zeitbereich	19
4.2 Die Pendelzeigerdarstellung der FM	19
4.2.1 Pendel-Zeiger bei Breitband-FM	20
4.2.2 Zerlegung des Pendelzeigerdiagramms in seine Inphasen- und Quadratur-Komponente	20
4.3 Die Spektralverteilung des FM-Signals für Cos-förmiges Nachrichtensignal	21
4.3.1 Die Besselfunktionen	23
4.3.2 Bestimmung des FM-Spektrums aus den Besselfunktionen	25
4.4 Das FM-Spektrum bei Zweitonaussteuerung	27
4.5 Das Zeigerdiagramm der FM	28
4.5.1 Das Drehzeigerdiagramm für Schmalband-FM	28
4.5.2 Das Drehzeigerdiagramm der Breitband-FM	29
4.6 Verzerrungen der FM bei der Übertragung	30
4.7 Amplitudenbegrenzung der FM-Schwingung	31
4.7.1 Hubvergrößerung durch Frequenzvervielfachung	32

<b>5 FM-Spektrums-Meßtechnik</b>	<b>33</b>
5.1 Messung des FM-Spektrums	33
5.2 Messung der Modulatorkonstanten	33
5.3 Die Frequenzhub-Messung	34
5.3.1 Hub-Begrenzung	34

## Abbildungsverzeichnis

1.1 FM und PM für Cos-förmiges Nachrichtensignal; die Frequenz-Änderung der FM-Schwingung ist proportional zu $u_N(t)$ , die Frequenz-Änderung der PM-Schwingung ist proportional zu $u_N'(t)$	1
1.2 FM und PM für rechteckförmiges und dreieckförmiges Nachrichtensignal, erzeugt mit einem Frequenz-Modulator. Integriertes Nachrichten-Signal (gestrichelt) für eine Erzeugung mittels eines Phasen-Modulators.	1
1.3 Die Auswirkung der Amplitude des Nachrichtensignals auf den Zeitverlauf eines frequenzmodulierten Signals: Die Nulldurchgänge der FM ändern sich, die Amplitude der FM bleibt konstant.	2
1.4 Bodediagramm des Differenziergliedes $H_D(\omega)$	3
1.5 Erzeugung einer Phasenmodulation mit einem Frequenzmodulator (links) und Demodulation einer PM mit einem F-Demodulator (rechts)	4
1.6 Beispiele für eine FM mit dem Nachrichtensignal $u_N(t)$ und dem differenzierten Signal $u_N'(t)$ , wodurch PM mit einem Frequenzmodulator entsteht.	4
1.7 Bodediagramm des Integrierergliedes $H_I(\omega)$	5
1.8 Erzeugung einer Frequenzmodulation mit einem Phasenmodulator (links) und Demodulation einer FM mit einem P-Demodulator (rechts)	5
2.1 Direkte Erzeugung einer Phasenmodulation mittels eines Allpasses	6
2.2 Zur Demodulation einer PM ist eine Schwingung mit einer Referenz-Phase $\varphi_2$ notwendig.	6
2.3 Erzeugung von Frequenzmodulation mit spannungsgesteuertem Oszillator	7
2.4 Blockschaltbild eines NCO	7
2.5 Differenzier zur FM $\rightarrow$ AM Wandlung	8
2.6 Hüllkurven-Demodulation eines differenzierten FM-Signals	8
2.7 Preemphase und Deemphase bei analogen FM-Systemen zum Zwecke der Rausch-Unterdrückung	8
2.8 I/Q Phasenmodulator für beliebige Werte von $\varphi(t)$	9
2.9 Phasenmodulator für kleine Werte von $\varphi(t) \ll 1$	10
3.1 Filterbank zur Veranschaulichung der Frequenz	10
3.2 Cosinus-Schwingung aus der Projektion eines rotierenden Zeigers auf die reelle Achse	11
3.3 Spektralverteilung von Schmalband-PM und Schmalband-FM	13
3.4 Spektralverteilung der GSM für 2 benachbarte Funk-Kanäle. „0“ entspricht der Mittenfrequenz eines Kanals. Der Kanal-Abstand ist 200 KHz.	13
3.5 Zur Definition des Dispersions-Index	14
3.6 Der näherungsweise Verlauf der Spektralverteilung der FM-Schwingung für cos-förmiges Nachrichtensignal (sehr niedriger Frequenz)	15
3.7 Der näherungsweise Verlauf der Spektralverteilung der FM-Schwingung für sägezahnförmiges Nachrichtensignal (sehr niedriger Frequenz)	16
3.8 Annäherung der FM durch Bursts unterschiedlicher Frequenz zur Abschätzung der Bandbreite	16
3.9 Universelle Kurve für die erforderliche 99%-Bandbreite $B_{99}$ einer FM-Schwingung; $\beta = \eta$	17
3.10 Typische FM-Spektren für Breitband-FM	18
3.11 Spektralverteilung einer FM mit einem Nachrichtensignal mit Gauß-förmiger Amplitudenverteilung	18
3.12 Linien-Spektrum eines FM-Signals mit rechteckförmigem (periodischem) Nachrichtensignal	18
4.1 Pendelzeigerdiagramme für verschiedene maximale Phasenauslenkung	20
4.2 Zerlegung eines Pendelzeigers in seine Inphasen- und Quadratur-Komponente. $A = \hat{U}_C$	20
4.3 Der zeitliche Verlauf der I- und Q-Komponenten für Winkelmodulationen mit unterschiedlichen Phasenhüben.	21
4.4 Beispiele für Chladni'sche Klangfiguren	23

4.5	Besselfunktionen 1. Art als Funktion des Arguments $\beta$ . . . . .	23
4.6	Dreidimensionale Darstellung der Besselfunktionen . . . . .	24
4.7	Anfangsbereiche der Besselfunktionen für kleine Werte bis 0,06 . . . . .	24
4.8	Nullstellen und Extrema der Besselfunktionen . . . . .	25
4.9	Trägerleistung zu Seitenbandleistung in Abhängigkeit vom Phasenhub (Modulationsindex) . . . . .	25
4.10	Die Größe der Spektrallinien aus den Besselkurven für $\beta = 5$ . . . . .	26
4.11	Betrag des FM-Spektrums für $\beta = 5$ in zweiseitiger Darstellung . . . . .	26
4.12	Beispiele für FM-Spektren mit konstanter NF-Frequenz $\omega_N$ und mit konstantem Frequenzhub $\Delta\Omega$ . . . . .	26
4.13	Amplitudenspektren bei Zweitton-Modulation. Im Beispiel ist die Faltungsoperation gut zu erkennen. . . . .	27
4.14	Das Zeigerdiagramm der Schmalband-FM/PM . . . . .	28
4.15	Besselspektrum und Drehzeigerdiagramm . . . . .	29
4.16	Beispiele für Drehzeigerdiagramme . . . . .	29
4.17	Das Drehzeigerdiagramm zu verschiedenen Zeiten . . . . .	30
4.18	Beispiel für Drehzeigerdiagramm und demoduliertes Signal bei harter Bandbegrenzung . . . . .	30
4.19	Beispiele für die Verzerrung des Drehzeigerdiagramms . . . . .	30
4.20	Dämpfungsverlauf und Gruppen-Laufzeit $t_{gr}(f)$ eines FM ZF-Filters für minimale Verzerrungen des demodulierten Nachrichtensignals und Signal-zu-Geräusch-Abstand des demodulierten Signals . . . . .	31
4.21	Amplitudenbegrenzung einer FM-Schwingung: Blockstruktur und Signale . . . . .	32
4.22	Spektrum der amplitudenbegrenzten FM-Schwingung: Der Hub $\Delta\Phi$ ist proportional zur Vielfachen der Trägerfrequenz. . . . .	32
5.1	Praktisch gemessenes und theoretisches Spektrum einer FM-Schwingung für sehr niederfrequentes Nachrichtensignals . . . . .	33



# Winkelmodulation

## 1 Die Winkelmodulation im Zeitbereich

Der hochfrequente Träger (*carrier*) ist eine Cos-förmige Schwingung der Form

$$u(t) = \hat{U}_C \cos(\Omega_C t + \psi(t)) = \hat{U}_C \cos[\psi(t)] = \Re\{\hat{U}_C e^{j(\Omega_C t + \psi(t))}\} \tag{1.1}$$

Je nach der Art, wie das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  in den Winkel  $\psi(t)$  eingreift, unterscheidet man zwischen Frequenzmodulation (FM) oder Phasenmodulation (PM).

**FM:** Die **Frequenz-Änderung** (der modulierten Schwingung) ist proportional zum Nachrichten-Signal  $u_N(t)$

**PM:** Die **Phasen-Änderung** (der modulierten Schwingung) ist proportional zum Nachrichten-Signal  $u_N(t)$

In komplexer Schreibweise wird der Cosinus durch  $e^{j(\Omega_C t + \psi(t))}$  ersetzt, wodurch die (alternative) Bezeichnung **Exponentialmodulation** für die Winkelmodulation verständlich wird.

### 1.1 Eingriff in den Winkel des Hochfrequenzträgers

Das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  beeinflusst den Winkel  $\psi(t)$  des Trägers. Die **Amplitude** der Trägerschwingung bleibt dabei **unverändert**.

Die zeitlichen Verläufe von Phasen- und Frequenzmodulation stellen sich damit wie folgt dar, wenn als Nachrichtensignal  $u_N(t)$  eine sinusförmige bzw. eine rechteckförmige und eine dreieckförmige Spannung verwendet wird, Bilder 1.1 und 1.2. Man beachte, daß die **Amplitude** der winkel-modulierten Schwingung **absolut konstant** ist.

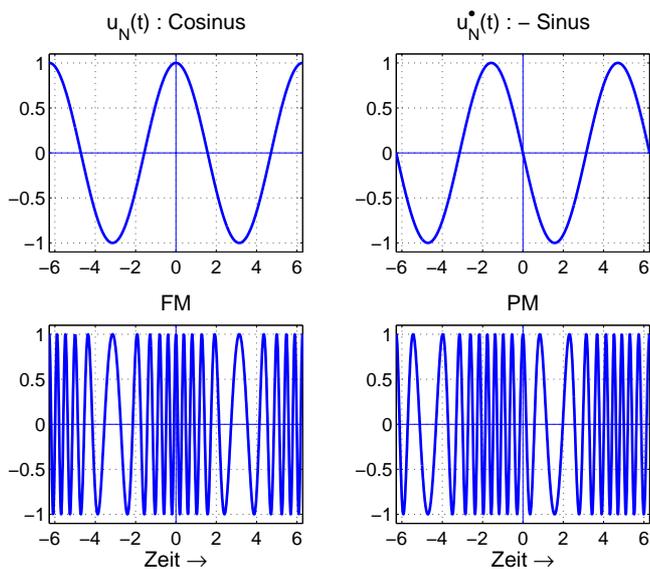


Bild 1.1: FM und PM für Cos-förmiges Nachrichtensignal; die Frequenz-Änderung der FM-Schwingung ist proportional zu  $u_N(t)$ , die Frequenz-Änderung der PM-Schwingung ist proportional zu  $u_N^*(t)$

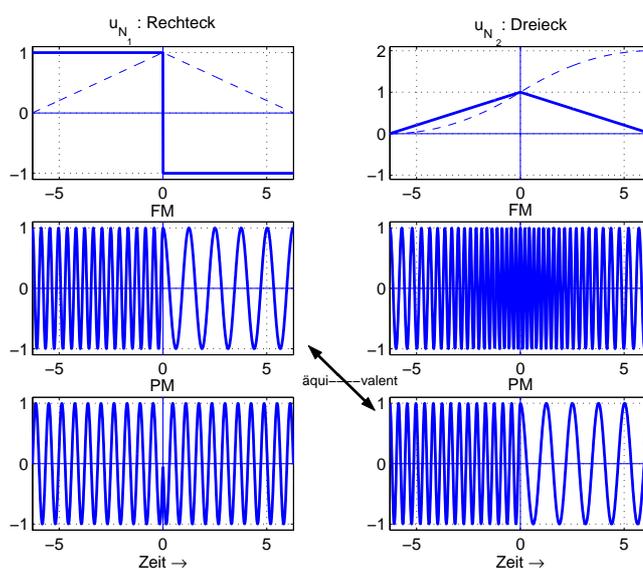


Bild 1.2: FM und PM für rechteckförmiges und dreieckförmiges Nachrichtensignal, erzeugt mit einem Frequenz-Modulator. Integriertes Nachrichten-Signal (gestrichelt) für eine Erzeugung mittels eines Phasen-Modulators.

Die Amplitude des Nachrichtensignals bestimmt die **Lage der Nulldurchgänge** der winkelmodulierten Schwingung — nicht jedoch in ihre Amplitude, wie Bild 1.3 (Seite 2) am Beispiel eines frequenzmodulierten Signals zeigt.

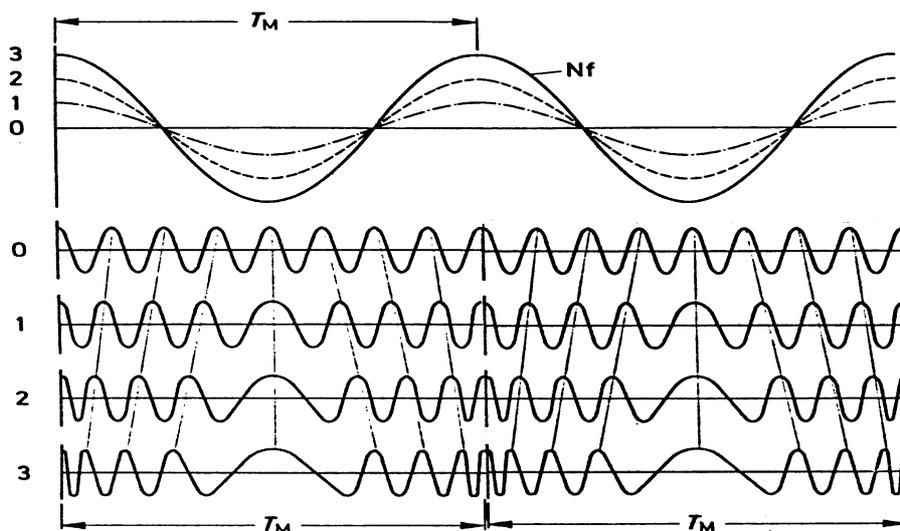


Bild 1.3: Die Auswirkung der Amplitude des Nachrichtensignals auf den Zeitverlauf eines frequenzmodulierten Signals: Die Nulldurchgänge der FM ändern sich, die Amplitude der FM bleibt konstant.

1.1.1 Beeinflussung des Winkels  $\varphi(t)$

Zur Beeinflussung des Winkels  $\varphi(t)$  einer Trägerschwingung  $\hat{U}_C \cos(\Omega_C t + \varphi(t))$  gibt es folgende Möglichkeiten:

$\varphi(t)$	$=$	$k_{PM} \cdot u_N(t)$	$\rightsquigarrow$	<b>Phasen-Modulation PM</b>	(1.2)
$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \Delta\omega(t)$	$=$	$k_{FM} \cdot u_N(t)$	$\rightsquigarrow$	Frequenz-Modulation FM	
$\rightsquigarrow \varphi(t)$	$=$	$k_{FM} \cdot \int_0^t u_N(\tau) d\tau$	$\rightsquigarrow$	<b>Frequenz-Modulation FM</b>	

$k_{PM}$  und  $k_{FM}$  sind die zugehörigen **Modulatorkonstanten**. Wie aus dieser Gleichung (1.2) hervorgeht, sind PM und FM eng mit einander verwandt. Dies wird auch aus den obigen Zeitverläufen erkennbar:

- Ist die Phasen-Änderung proportional zum Nachrichten-Signal, so ist die **Frequenz**-Änderung proportional zum **integrierten** Nachrichtensignal.
- Ist die Frequenz-Änderung proportional zum Nachrichten-Signal, so ist die **Phasen**-Änderung proportional zum **differenzierten** Nachrichten-Signal.

1.2 Verwandtschaft von Phasen- und Frequenzmodulation

Die Analyse der Zeitverläufe in den Bildern 1.1 1.2 und 1.3 zeigt folgendes:

- Positives Nachrichten-Signal  $u_N(t)$  ergibt höhere „Frequenz“ bei der FM; negatives Nachrichten-Signal ergibt eine niedrigere „Frequenz“ bei der FM.  
 „Frequenz“ soll hier als **Anzahl der Nulldurchgänge pro Zeiteinheit** verstanden werden. Da sich diese „Frequenz“ zeitlich ändert, wird sie als „**Momentan**“-Frequenz  $\omega(t)$  bezeichnet, Kapitel 3.1, Seite 11.
- Bei der PM hat man ein gleichartiges Verhalten bezogen auf die **zeitliche Ableitung** des Nachrichten-Signals  $\frac{d}{dt}u_N(t)$ .
- Eine ein Nachrichten-Signal  $u_{N_1}(t)$  in Rechteck-Form ergibt eine FM, die genau so aussieht, wie eine PM mit einem dreieckförmigen Nachrichten-Signal  $u_{N_2}(t)$ .  
 Das Rechteck  $u_{N_1}(t)$  ergibt sich als Ableitung des Dreiecks  $u_{N_2}(t)$ . Also liegen die gleichen Verhältnisse vor wie im vorigen Fall.

### 1.2.1 Phasenmodulation

Mit den Definitionen, Gleichungen (1.1, 1.2), gilt für einen **phasenmodulierten Träger**  $u_{PM}(t)$ :

$$u_{PM}(t) = \hat{U}_C \cos[\Omega_C t + \varphi(t)] = \hat{U}_C \cos[\Omega_C t + k_{PM} \cdot u_N(t)] \quad \text{PM} \quad (1.3)$$

Die **Modulorkonstante**  $k_{PM}$  hat die **Einheit** [Grad/Volt] oder [rad/Volt], bzw. [1/Volt], da Grad und Radiant *Pseudoeinheiten* sind.

### 1.2.2 Frequenzmodulation

Für einen **frequenzmodulierten Träger**  $u_{FM}(t)$  gilt mit Gleichung (1.2):

$$u_{FM}(t) = \hat{U}_C \cos[\Omega_C t + \varphi(t)] = \hat{U}_C \cos \left\{ \Omega_C t + k_{FM} \int_0^t u_N(\tau) d\tau \right\} \quad \text{FM} \quad (1.4)$$

Die **Modulorkonstante**  $k_{FM}$  hat die **Einheit** [1/(Volt Sekunde)] (bzw. [KHz/Volt] für natürliche Frequenz).

### 1.2.3 Zur meßtechnischen Bestimmung der Modulorkonstanten

Meßtechnisch bestimmt man die Modulorkonstante zweckmäßigerweise als  $K_{FM}$ , wobei die Spannung, je nach Meßverfahren, in  $V_{\text{eff}}$  oder  $V_{\text{ss}}$  eingesetzt wird. Für die (natürliche) Frequenz  $f$  nimmt man dann z.B.  $KHz$  (und nicht die Kreisfrequenz  $\omega$  in  $1/sec$ ). Die Zahlenwerte von  $k_{FM}$  und  $K_{FM}$  unterscheiden sich daher um die entsprechenden Faktoren ( $2\pi, 10^3, \sqrt{2}$ ).

### 1.2.4 Phasenmodulation mit einem Frequenzmodulator

Da PM und FM eng miteinander verwandt sind, kann eine PM auch mit Hilfe eines FM Modulators erzeugt werden. Um mit Hilfe eines Frequenzmodulators eine Phasenmodulation zu erzeugen, muß das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  **differenziert** werden. Die geschieht mittels eines Differenziergliedes (D-Glied). Für das Differenzierglied gilt<sup>1</sup>:

$$x_a(t) = T \cdot \frac{dx_e(t)}{dt} \quad \circlearrowright \bullet \quad X_a(\omega) = T \cdot j\omega X_e(\omega) \quad \rightsquigarrow \quad H_D(\omega) = j\omega T \quad (1.5)$$

Bild 1.4 zeigt das Bodediagramm eines Differenziergliedes. Wie man daraus erkennt, ist das Differenzieren der Nachrichtenspannung gleichbedeutend mit einer **Höhen-Anhebung** (und Tiefen-Absenkung).

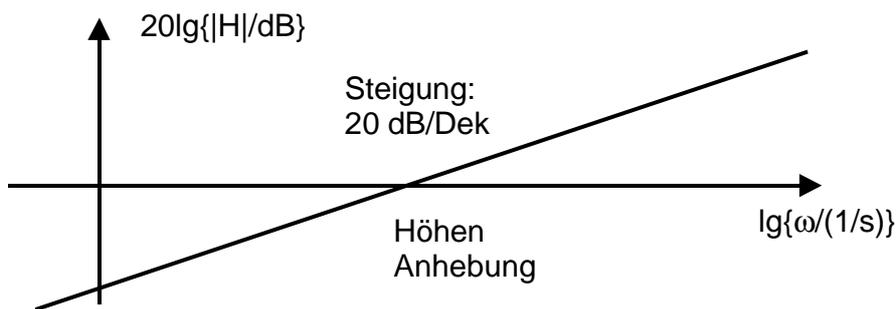


Bild 1.4: Bodediagramm des Differenziergliedes  $H_D(\omega)$

Differenziert man also das Nachrichtensignal  $u_N(t)$ , so erhält man  $T \cdot u_N(t)'$ . Mit Gleichung (1.2) wird dann bei Benutzung eines Frequenzmodulators:

<sup>1</sup>Vergleiche hierzu den Zeit-Differentiationssatz der Fourier-Transformation. Aus der Regelungstechnik ist die Schreibweise  $H_D(s) = sT$  für das D-Glied bekannt. Siehe hierzu auch das Kapitel über die „Laplace-Transformation“.

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = k_{FM} \cdot T \frac{du_N(t)}{dt} \tag{1.6}$$

Bezogen auf das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  muß Gleichung (1.6) integriert werden, wodurch man zu einer Phasenmodulation kommt:

$$\varphi(t) = k_{FM} \cdot T \cdot u_N(t) = k_{PM} \cdot u_N(t) \tag{1.7}$$

Die Modulatorkonstante dieses mit Hilfe eines Frequenzmodulators erzeugten Phasenmodulators ist somit:

$$k_{PM} = k_{FM} \cdot T \quad \text{Modulatorkonstante} \tag{1.8}$$

Bild 1.5 zeigt links die zugehörige Struktur für diesen Modulator und rechts den entsprechenden Demodulator.

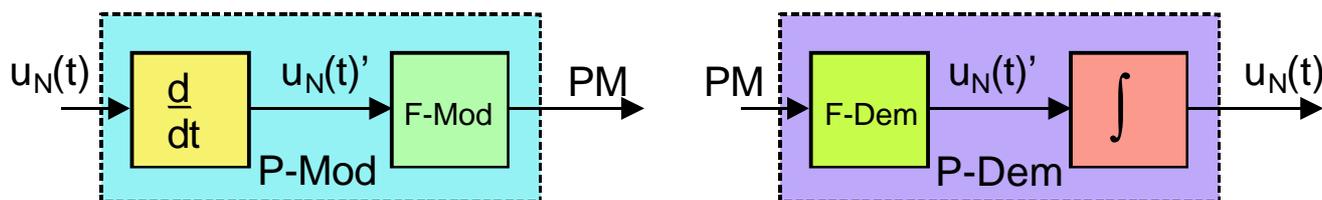


Bild 1.5: Erzeugung einer Phasenmodulation mit einem Frequenzmodulator (links) und Demodulation einer PM mit einem F-Demodulator (rechts)

Das Konzept der Erzeugung einer Phasenmodulation mittels eines Frequenzmodulators läßt sich aufgrund des erforderlichen Differenzierers nicht uneingeschränkt anwenden, da beim Differenzieren  $\delta(t)$ -Impulse auftreten können, die dann im praktischen Fall zu einer Übersteuerung des FM Modulators führen. Bild 1.6 (rechts) zeigt diese Impulse an einem Beispiel.

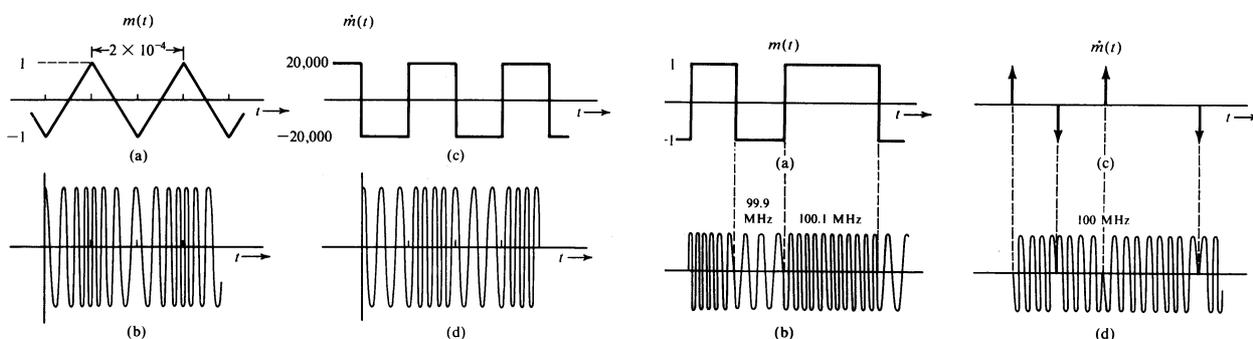


Bild 1.6: Beispiele für eine FM mit dem Nachrichtensignal  $u_N(t)$  und dem differenzierten Signal  $u_N(t)'$ , wodurch PM mit einem Frequenzmodulator entsteht.

### 1.2.5 Erzeugung von FM mit einem Phasenmodulator

Um eine Frequenzmodulation mit einem Phasenmodulator zu erzeugen, muß das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  **integriert** werden. Dies geschieht mittels eines Integriergliedes. Für das Integrierglied gilt<sup>2</sup>:

$$x_a(t) = \frac{1}{T} \int_0^t x_e(\tau) d\tau \quad \circ \bullet \quad X_a(\omega) = \frac{1}{T} \cdot \frac{X_e(\omega)}{j\omega} \quad \rightsquigarrow \quad H_I(\omega) = \frac{1}{j\omega T} \tag{1.9}$$

<sup>2</sup>Vergleiche hierzu den Zeit-Integrationssatz der Fourier-Transformation. Aus der Regelungstechnik ist die Schreibweise  $H_I(s) = \frac{1}{sT}$  für das Integrierglied bekannt.

Bild 1.7 zeigt das Bodediagramm eines Integriergliedes. Wie man daraus erkennt, ist das Integrieren eines Nachrichtensignals gleichbedeutend mit einer **Höhen-Absenkung** (und Tiefen-Anhebung).

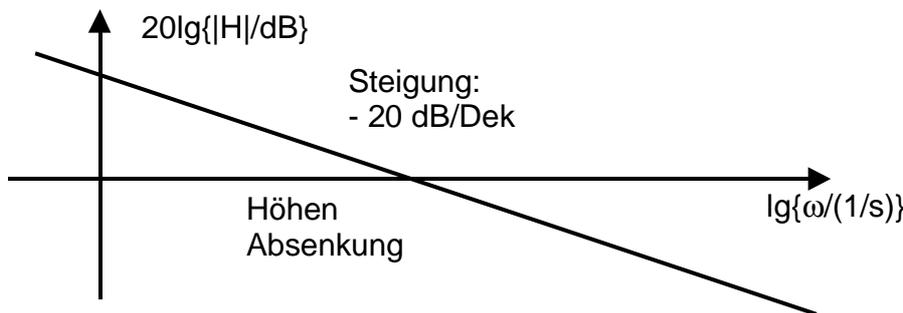


Bild 1.7: Bodediagramm des Integriergliedes  $H_I(\omega)$

Integriert man nun das Nachrichtensignal  $u_N(t)$ , so erhält man  $\frac{1}{T} \int_0^t u_N(\tau) d\tau$ . Mit Gleichung (1.2) wird dann bei Benutzung eines Phasenmodulators:

$$\varphi(t) = k_{PM} \cdot \frac{1}{T} \int_0^t u_N(\tau) d\tau \tag{1.10}$$

Bezogen auf das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  muß Gleichung (1.10) differenziert werden:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = k_{PM} \cdot \frac{1}{T} \cdot u_N(t) = k_{FM} \cdot u_N(t) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{k_{FM} = \frac{1}{T} \cdot k_{PM} \quad \text{Modulatorkonstante}} \tag{1.11}$$

Das Blockschaltbild zur Erzeugung einer FM mittels eines Phasenmodulators zeigt Bild 1.8 links. Wegen der Quarz-Stabilität der Trägerschwingung wurde diese Modulator-Struktur zu Beginn des UKW-FM-Rundfunks gerne verwendet. Siehe hierzu den Abschnitt 2.4.1 „Schmalband-Phasen-Modulator“ (Seite 9).

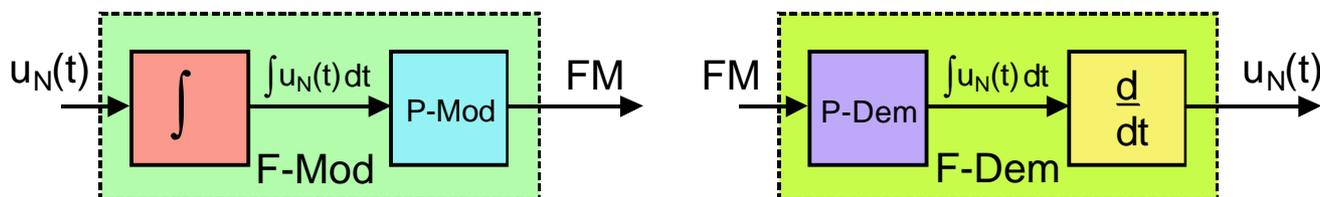


Bild 1.8: Erzeugung einer Frequenzmodulation mit einem Phasenmodulator (links) und Demodulation einer FM mit einem P-Demodulator (rechts)

Die Demodulation einer FM mit Hilfe eines Phasen-Demodulators und nachfolgendem Differenzieren ist in der Praxis ungünstig, weil durch das Differenzieren die Störungen (Rauschen usw.) gegenüber dem Nutzsinal angehoben werden.

## 2 Modulation und Demodulation von PM und FM

Aufgrund der engen Verwandtschaft von PM und FM ist es möglich, die zugehörigen Modulatoren und Demodulatoren wechselseitig zu verwenden.

### 2.1 Erzeugung von Phasenmodulation

Ein Phasenmodulator besteht aus einem Phasensteller, der durch das Nachrichtensignal gesteuert wird, in Bild 2.1 mit  $\Delta\Phi(u_N(t))$  bezeichnet.

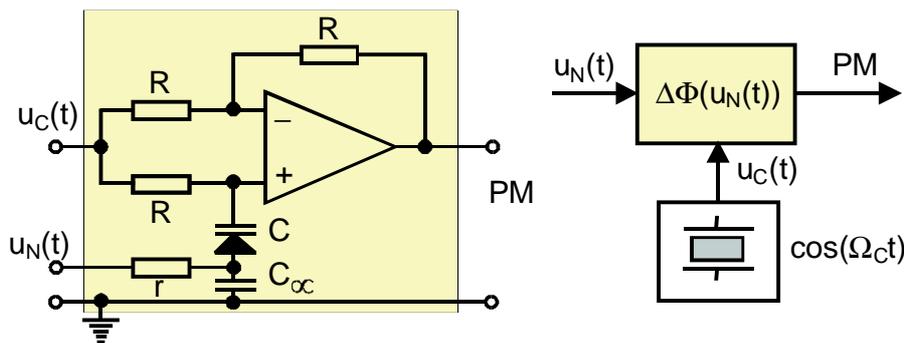


Bild 2.1: Direkte Erzeugung einer Phasenmodulation mittels eines Allpasses

Die Phase der Hochfrequenz-Schwingung am Ausgang des Phasenstellers bezogen auf dessen Eingang ändert sich in Abhängigkeit des Nachrichtensignals  $u_N(t)$ . Die Trägerschwingung wird i.a. mit einem Quarzoszillator erzeugt. Die Trägerfrequenz  $\Omega_C$  ist daher quarzstabil. Ein solcher Phasensteller oder Phasenschieber kann **analog** z.B. mit Hilfe eines **Allpasses** realisiert werden. Die Kapazität wird dabei mit Hilfe einer Kapazitäts-Diode realisiert. Das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  greift dann in die Vorspannung der Kapazitäts-Diode ein.

Technische Probleme bei analogen Phasenschiebern sind:

- Nichtlinearer Zusammenhang zwischen Steuersignal  $u_N(t)$  und Winkeländerung  $\Delta\Phi$ .
- Große Winkeländerungen sind nur schwer erreichbar.

Digital läßt sich ein Phasenmodulator sehr präzise realisieren, siehe Abschnitt 2.4 „I/Q Phasenmodulator“.

### 2.1.1 Demodulation einer Phasenmodulation

Ein **Phasendemodulator** benötigt eine **Referenzphase**  $\varphi_2$  (z.B.  $\varphi_2 = 0$ ), da per Definition der Phase diese nur als Unterschied zwischen zwei Schwingungen angegeben werden kann. Bei der Demodulation von phasenmodulierten Daten muß diese Referenzphasenlage z.B. mit Hilfe einer Schaltung zur **Trägerrückgewinnung** erzeugt werden. Für die Demodulation **digitaler** Nachrichten-Signale ist dies die einzige Möglichkeit. Dies ist eine praktische Schwierigkeit bei der direkten Demodulation einer Phasenmodulation.

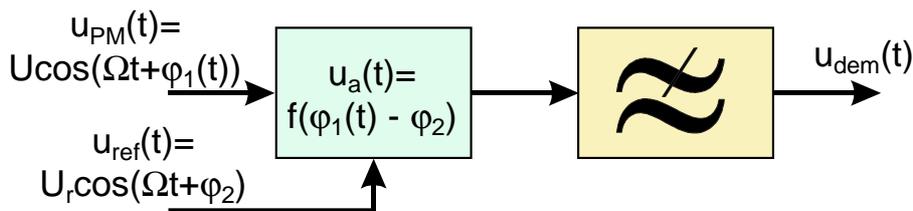


Bild 2.2: Zur Demodulation einer PM ist eine Schwingung mit einer Referenz-Phase  $\varphi_2$  notwendig.

Ein **Frequenzdemodulator** benötigt eine **Referenzfrequenz**, die aber bequem z.B. mit Hilfe eines Resonanzkreises dargestellt werden kann, was technisch viel einfacher ist. Da Phasenmodulation als Frequenzmodulation mit Höhenanhebung (D-Glied) aufgefaßt werden kann, folgt sofort, daß nach einem Frequenzdemodulator eine Höhenabsenkung (I-Glied) folgen muß, Bild 1.5 rechte Seite.

## 2.2 Erzeugung einer Frequenzmodulation

Die direkte Erzeugung einer Frequenzmodulation erfolgt mit Hilfe eines Spannungs- oder Strom-gesteuerten Oszillators (VCO bzw. CCO). Das Nachrichtensignal greift also unmittelbar in den frequenzbestimmenden Teil des Oszillators ein, Bild 2.3.

Ein Frequenzmodulator ist daher ein Oszillator mit Frequenz–Steuereingang. Eine analoge Änderung der Schwingkreis­kapazität über die Vorspannung einer Kapazitätsdiode führt nur für kleine Aussteuerung näherungsweise zu einer proportionalen (linearen) Frequenzänderung. Die Frequenzstabilität der Trägerfrequenz kann bei einer analogen Realisierung des Oszillators nur mit Hilfe einer Frequenz–Regelung sichergestellt werden.

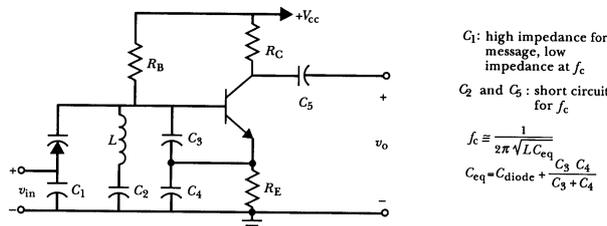


Bild 2.3: Erzeugung von Frequenzmodulation mit spannungsgesteuertem Oszillator

Die digitale Variante ist der **numerisch gesteuerte Oszillator** (NCO), welcher eine quarzstabile Mit­tenfrequenz hat und dessen Frequenzänderung exakt proportional zum Nachrichtensignal ist.

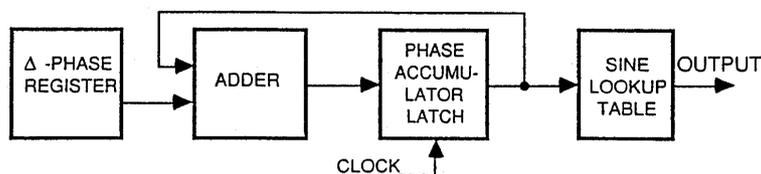


Bild 2.4: Blockschaltbild eines NCO

Bild 2.4 zeigt die Blockstruktur eines NCO (NCO: *numerically controlled oscillator*). Herzstück eines NCO ist eine Look–Up Tabelle, in der die Stützwerte der Cos– bzw. Sin–Schwingung mit großer Genauigkeit und in ausreichender Anzahl abgelegt sind. Für eine gewünschte Frequenz wird im Phasen–Accumulator eine entsprechende Schrittweite eingestellt. Über das  $\Delta$ –Phasen Register läßt sich die Phase modulieren.

### 2.2.1 Demodulation einer Frequenzmodulation

Eine der Möglichkeiten zur Demodulation einer FM besteht darin, die Frequenzänderung eines FM–Signals mittels eines **Differenzierers** in eine (zusätzliche) **Amplitudenänderung** zu überführen<sup>1</sup>. Diese Amplitudenänderung läßt sich dann mit Hilfe eines **Hüllkurven–Demodulators** demodulieren, wie es Bild 2.6 (Seite 8) zeigt.

Ein winkelmoduliertes Signal hat per Definition eine konstante Einhüllende. Im praktischen Fall muß dies (empfangsseitig) mit Hilfe eines **Begrenzerverstärkers** zuvor erzwungen werden.

Wird zur Demodulation einer FM–Schwingung ein Phasen–Demodulator verwendet, so muß das Ausgangssignal dieses Phasendemodulators *differenziert* werden, Bild 1.8 rechts. Dies kann als Umkehrung des Modulationsprozesses zur Erzeugung einer FM mittels eines Phasenmodulators gesehen werden. Ein solcher Demodulator ist für eine praktische Anwendung in aller Regel ungeeignet, da durch das Differenzieren (Höhenanhebung) das **Rauschen** und sonstige **Störungen** verstärkt werden.

## 2.3 Signalaufbereitung für FM–Systeme mit analogem Nachrichtensignal

FM–Systeme mit analogem Nachrichtensignal findet man z.B. bei

- UKW–Rundfunk
- FM–Richtfunk

<sup>1</sup>Weitere Informationen zur FM–Demodulation im Skript „Demodulation frequenzmodulierter Signale“.

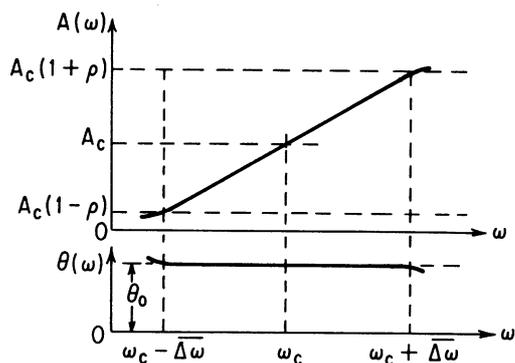


Bild 2.5: Differenzier zur FM → AM Wandlung

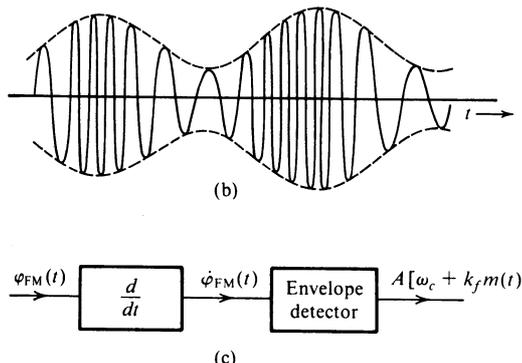


Bild 2.6: Hüllkurven-Demodulation eines differenzierten FM-Signals

- TV-Satellitenfunk (PAL)
- öffentlichen/nichtöffentlichen Funkdiensten (veraltet, aber z.T. noch in Betrieb)

Aus Gründen der Störbeeinflussung der FM durch Rauschen wird bei allen diesen Anwendungen als Winkel-Modulation eine **Mischform aus FM und PM** angewendet. Als Modulator wird dabei ein FM-Modulator verwendet, jedoch erfolgt eine Höhen-Anhebung (**Pre-Emphase**) ab einer festgelegten Grenzfrequenz<sup>2</sup>, die für die jeweilige Anwendung geeignet gewählt ist.

Empfangsseitig wird diese Höhenanhebung wieder so abgesenkt (**De-Emphase**), daß über alles ein **konstanter Frequenzgang** entsteht. Mit der Höhenabsenkung wird auch das entstandene höherfrequente Rauschen abgesenkt.

Diese Höhenanhebung erfolgt z.B. mittels eines  $PDT_1$ -Gliedes (RC-Hochpaß). Die empfangsseitige Höhenabsenkung geschieht durch ein  $PT_1$ -Glieder (RC-Tiefpaß), Bild 2.7. Die Knick-Frequenz ist beim UKW-FM-Rundfunk zu 3,1831 KHz (Zeitkonstante  $T_1 = 50\mu sec$ ) festgelegt (in USA  $T_1 = 75\mu sec$ ).

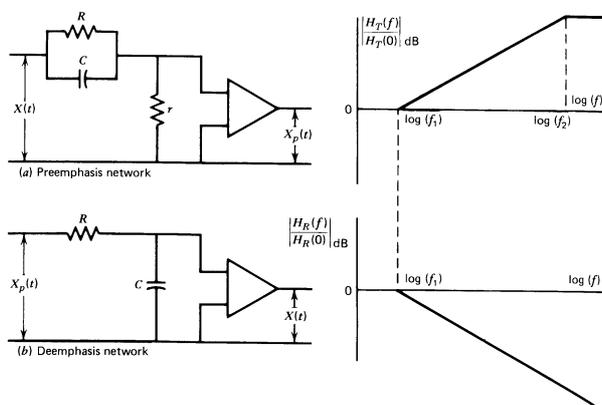


Bild 2.7: Preemphase und Deemphase bei analogen FM-Systemen zum Zwecke der Rausch-Unterdrückung

Die Preemphase bewirkt somit, daß

- tieferfrequente Signalanteile als **FM**
- höherfrequente Signalanteile als **PM**

gesendet werden.

In der Praxis wird eine FM mit Preemphase und Deemphase der Einfachheit halber als FM bezeichnet, wie z.B. beim UKW-Rundfunk, wo von FM-Sendern gesprochen wird.

<sup>2</sup>Also ohne Tiefen-Absenkung.

## 2.4 I/Q Phasenmodulator

Gemäß Gleichungen (1.3,1.4) kann man für eine winkelmodulierte Schwingung schreiben:

$$u_{WM}(t) = \hat{U}_C \cos[\Omega_C t + \varphi(t)] \tag{2.1}$$

Mit dem Additionstheorem wird Gleichung (2.1) wie folgt umgeformt.

$$u_{WM}(t) = \hat{U}_C [\cos \varphi(t) \cos(\Omega_C t) - \sin \varphi(t) \sin(\Omega_C t)] \tag{2.2}$$

Diese Gleichung (2.2) liefert die Grundlage für den I/Q Phasen-Modulator. Sie kann direkt in eine Blockstruktur überführt werden, Bild 2.8.

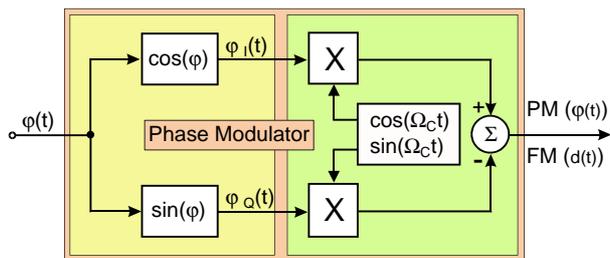


Bild 2.8: I/Q Phasenmodulator für beliebige Werte von  $\varphi(t)$

Wird eine Integration des Nachrichtensignals vorgenommen, kann auch eine FM erzeugt werden. Diese Art der Realisierung hat speziell für Modulationen für Digitale Signale eine große Bedeutung erlangt, da sich die Bildung von Cos und Sin digital sehr exakt realisieren läßt. Es wird dann mit Hilfe von 2 orthogonal (Cos bzw. Sin) angesteuerten Multiplizierern (DSB-Modulatoren!) eine Winkelmodulation erzeugt. Technisch läßt sich diese Art der Modulation völlig digital realisieren. Hierin liegt die große Bedeutung dieser Methode.

Die Realisierung einer PM nach dem I/Q-Verfahren hat folgende Eigenschaften, die für eine digitale Modulation unverzichtbar sind:

1. Die Trägerfrequenz  $\Omega_C$  ist quarzstabil.
2. Die untere Grenzfrequenz für das Nachrichtensignal ist 0.
3. Auch bei beliebig großem Wert des Phasenwinkels  $\varphi$  ist der Modulator nicht übersteuert.
4. Der Zusammenhang zwischen Nachrichtensignal und Phasenwinkeländerung ist linear.

### 2.4.1 Schmalband Phasen-Modulator

Beschränkt man sich auf kleine Werte des Phasenwinkels, erhält man eine Schmalband Winkelmodulation und die Struktur in Bild 2.8 läßt sich sehr stark vereinfachen.

Schmalband-Winkelmodulation ist dadurch definiert, daß gilt:

$$|\varphi(t)| \ll 1 \quad \rightsquigarrow \quad \cos \varphi(t) \approx 1 \quad ; \quad \sin \varphi(t) \approx \varphi(t) \tag{2.3}$$

Für den Spezialfall eines cos-förmigen Nachrichtensignals  $u_N(t) = \hat{u}_N \cos \omega_N t$  kann man zusätzlich die Bedingung

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \Delta\varpi(t) \ll \omega_N \tag{2.4}$$

angeben.

Damit erhält man für das winkelmodulierte Signal

$$u_{WM}(t) \approx \hat{U}_C [\cos(\Omega_C t) - \varphi(t) \cdot \sin(\Omega_C t)] \tag{2.5}$$

Die Struktur, die zu dieser Gleichung gehört, zeigt Bild 2.9.

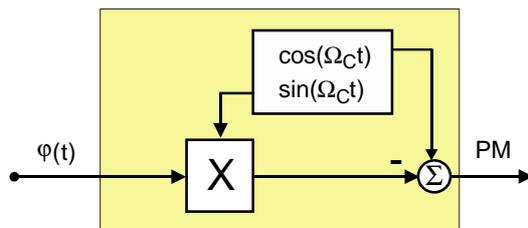


Bild 2.9: Phasenmodulator für kleine Werte von  $\varphi(t) \ll 1$

Dem Nachteil daß die Phasenänderung nur sehr klein sein darf, steht der Vorteil gegenüber, daß keine nichtlinearen Übertragungsblöcke ( $\cos(\dots)$ ,  $\sin(\dots)$ ) erforderlich sind. Der Nachteil der geringen Phasenauslenkung (und damit des kleinen Frequenzhubes) läßt sich mittels Frequenz-Vervielfachung überwinden. (Kapitel 4.7.1, Seite 32)

### 3 Spektren winkelmodulierter Schwingungen

Das Spektraldichte  $F(\omega)$  einer Zeitfunktion  $f(t)$  berechnet sich mit Hilfe des Fourier-Integrals.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad \text{Fourier-Transformation: Spektraldichte von } f(t) \quad (3.1)$$

Ein (idealisiertes) Meßgerät für eine Spektraldichte stellt eine Filterbank dar, bestehend aus  $\infty$  vielen LC-Kreisen  $\infty$  hoher Güte und damit mit Bandbreiten  $\rightarrow 0$ , Bild 3.1.

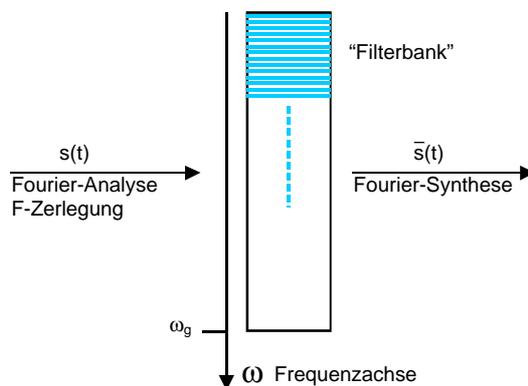


Bild 3.1: Filterbank zur Veranschaulichung der Frequenz

Die FM- und PM-Schwingungen der Bilder 1.1, 1.2 und 1.3 sind offensichtlich periodisch entsprechend zur Periode der Nachrichten-Signale. Periodische Zeitsignale haben Spektraldichten, die aus äquidistanten Linien bestehen. Es gilt allgemein:

$$\text{periodische Zeitfunktion} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \text{Spektraldichte: äquidistante Linien}$$

Die Berechnung der Spektralverteilung einer winkelmodulierten Schwingung ist für beliebiges Nachrichtensignal nicht **allgemein** möglich, da der Eingriff in das Argument einer  $\cos$ -Schwingung einen nichtlinearen Zusammenhang ergibt.

Aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs werden nur verschiedene **Näherungen** betrachtet, mit deren Hilfe man für praktische Fälle eine ausreichende Aussage über die zu erwartende Spektralverteilung eines winkelmodulierten Signals erhält.

### 3.1 Die „Momentan“-Frequenz

Die „Momentan“-Frequenz ist eine **zeitabhängige** Größe und damit keine Frequenz im Sinne von Fourier! Die Vorstellung, die der „Momentan“-Frequenz zugrunde liegt, ist die eines rotierenden Zeigers, dessen Projektion auf die reelle Achse eine Cosinus-Schwingung ergibt, Bild 3.2.

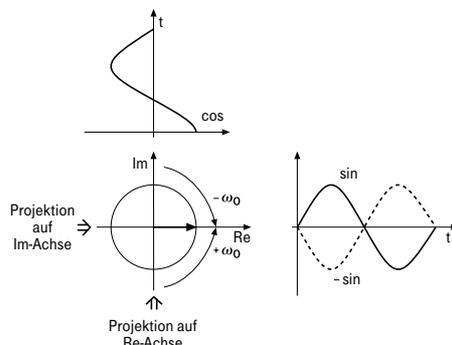


Bild 3.2: Cosinus-Schwingung aus der Projektion eines rotierenden Zeigers auf die reelle Achse

Die (Umlauf-)Frequenz des Zeigers (hier  $\omega_0$ ) bestimmt sich aus der Größe der **Phasen-Änderung** (des Zeigers) **pro Zeiteinheit**. Läuft der Zeiger **gleichmäßig** um, erhält man (als Projektion) eine **reine** Cosinus-Schwingung. Läuft der Zeiger dagegen **ungleichmäßig** um, erhält man (als Projektion) eine **winkelmodulierte** Cosinus-Schwingung.

Die Ableitung der Phase  $\psi(t)$  des modulierten Trägers  $\hat{U}_C \cos[\psi(t)]$ , Gleichung (1.1), nach der Zeit, die Phasenänderungs-Geschwindigkeit, ist **dimensionsmäßig** eine **Frequenz**, welche **Momentan-Frequenz**  $\varpi(t)$  genannt wird. Diese **Momentan-Frequenz**  $\varpi(t)$  ist **zeitabhängig**, da sie **physikalisch** eine **Änderungsgeschwindigkeit** darstellt.

Im Unterschied dazu ist die bei der Fourieranalyse auftretende Frequenz  $\omega$ , die physikalisch mit Hilfe einer **Filterbank** definiert werden kann, **nicht zeitabhängig**. Der Unterschied zwischen  $\varpi(t)$  und  $\omega$  wird im Abschnitt 5.1 FM-Spektrums-Meßtechnik (Seite 33) nochmals genauer betrachtet.<sup>1</sup>

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d\{\Omega_C \cdot t + \varphi(t)\}}{dt} = \Omega_C + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \varpi(t) \quad ; \quad \varpi(t) : \text{Momentan-Frequenz} \quad (3.2)$$

#### 3.1.1 Der Frequenz-Hub

Die zeitliche Frequenzänderung beträgt mit Gleichung (3.2)

$$\Delta\varpi(t) = \varpi(t) - \Omega_C = \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad \text{mit} \quad |\Delta\varpi(t)|_{\max} = \Delta\Omega \ll \Omega_C; \quad \Delta\Omega: \text{Frequenzhub} \quad (3.3)$$

Die maximale (zeitliche) Frequenzänderung  $|\Delta\varpi(t)|_{\max} = \Delta\Omega$  wird **Frequenz-Hub** genannt.

$$\Delta\Omega = |\Delta\varpi(t)|_{\max} = \left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{\max} = k_{FM} |u_N(t)|_{\max} \quad \text{Frequenzhub} \quad (3.4)$$

Der Frequenz-Hub ist im Fourier-Spektrum der FM somit kein Wert, wo sich notwendigerweise eine Spektrallinie befindet! Wie aus Gleichung (3.4) hervorgeht ist der **Frequenz-Hub** vielmehr ein **Maß für die maximale Amplitude** des Nachrichten-Signals  $u_N(t)$ . Für **praktische Fälle** zeigt sich jedoch:

- Die **Bandbreite**  $B_\omega$  einer winkelmodulierten Schwingung ist  $B_\omega \geq 2\Delta\Omega$ . (Kapitel 3.3.5, Seite 16)

$\Delta\Omega$  ist meist sehr klein, bezogen auf den Wert der Trägerfrequenz  $\Omega_C$ . Insofern sind die Darstellungen in den Bildern 1.1 bis 1.3 (aus didaktischen Gründen) stark übertrieben. Die Momentanfrequenz  $\varpi(t)$

<sup>1</sup>**Achtung:** in der Literatur wird die Momentan-Frequenz meist mit  $\omega(t)$  bezeichnet, was zu Mißverständnissen führen kann.

kann zudem **nie negativ** werden, weil das **physikalisch eine negative Frequenz** bedeuten würde. Der Frequenz-Hub  $\Delta\Omega$  kann also nie größer werden als die Trägerfrequenz  $\Omega_C$ .

Die in Gleichung (3.3) definierte **zeitliche Änderung der Momentanfrequenz**  $\Delta\varpi(t)$  ist also die **zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit eines rotierenden Zeigers**. Der Zeiger entspricht der komplexen Schreibweise einer Cos-förmigen Schwingung. Diese führt auf das bei den Winkelmodulationen gebräuchliche Bild des **Pendelzeigers**. (Kapitel 4.2, Seite 19). Wie man sofort erkennt, gilt stets:

- **Eine Phasenänderung bewirkt immer eine Frequenzänderung.**
- **Eine Frequenzänderung bewirkt immer eine Phasenänderung.**

Frequenz- und Phasen-Änderung treten also stets **gemeinsam** auf. Ob demnach eine Winkelmodulation als Phasenmodulation (PM) oder als Frequenzmodulation (FM) bezeichnet wird, hängt nur davon ab, welche der beiden Größen **Phasenänderung** oder **Frequenzänderung** dem Nachrichtensignal  $u_N(t)$  **proportional** ist.

Mit Gleichungen (3.3, 1.2) erhält man folgenden Zusammenhang, der die Bezeichnung **Frequenzmodulation** (FM) verständlich macht:

$$\Delta\varpi(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_{FM} \cdot u_N(t) \tag{3.5}$$

Daraus folgt: **Die zeitliche Änderung der Momentanfrequenz  $\Delta\varpi(t)$  ist bei einer FM proportional zum Nachrichtensignal.**

### 3.2 Spektrum der Schmalband-Modulationen

Gleichung (2.5) (Seite 9) läßt sich direkt Fourier-transformieren, wodurch sich die Spektralverteilung einer Schmalband-Winkelmodulation ergibt. Dabei werden die Korrespondenzen

$$\varphi(t) \circ\text{---}\bullet \Phi(\omega) \quad ; \quad u_N(t) \circ\text{---}\bullet U_N(\omega)$$

und der **Modulationssatz** verwendet.

$$U_{WM}(\omega) \approx \frac{\hat{U}_C}{2} [\delta(\omega - \Omega_C) + \delta(\omega + \Omega_C) + j\Phi(\omega - \Omega_C) - j\Phi(\omega + \Omega_C)] \tag{3.6}$$

Mit den Gleichungen (1.2, 1.4) gilt

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= k_{PM} \cdot u_N(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad \Phi(\omega) = k_{PM} \cdot U_N(\omega) && \mathbf{PM} \\ \varphi(t) &= k_{FM} \int_0^t u_N(\tau) d\tau \quad \circ\text{---}\bullet \quad \Phi(\omega) = k_{FM} \cdot \frac{U_N(\omega)}{j\omega} && \mathbf{FM} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Mit Gleichungen (3.6, 3.7) folgt nun für die Spektralverteilung von Schmalband-PM und Schmalband-FM, Bild 3.3:

$$U_{PM}(\omega) \approx \frac{\hat{U}_C}{2} [\delta(\omega - \Omega_C) + \delta(\omega + \Omega_C) + jk_{PM}U_N(\omega - \Omega_C) - jk_{PM}U_N(\omega + \Omega_C)] \quad \mathbf{PM} \tag{3.8}$$

$$U_{FM}(\omega) \approx \frac{\hat{U}_C}{2} \left[ \delta(\omega - \Omega_C) + \delta(\omega + \Omega_C) + k_{FM} \frac{U_N(\omega - \Omega_C)}{\omega - \Omega_C} - k_{FM} \frac{U_N(\omega + \Omega_C)}{\omega + \Omega_C} \right] \quad \mathbf{FM} \tag{3.9}$$

#### 3.2.1 Bandbreite der Schmalband-WM

Bei Schmalband-Winkelmodulation ist also die HF-Bandbreite (im Wesentlichen) durch die NF-Bandbreite bestimmt, und es gilt

$$B_{HF} \approx 2 \cdot B_{NF} \quad \mathbf{Schmalband-WM} \tag{3.10}$$

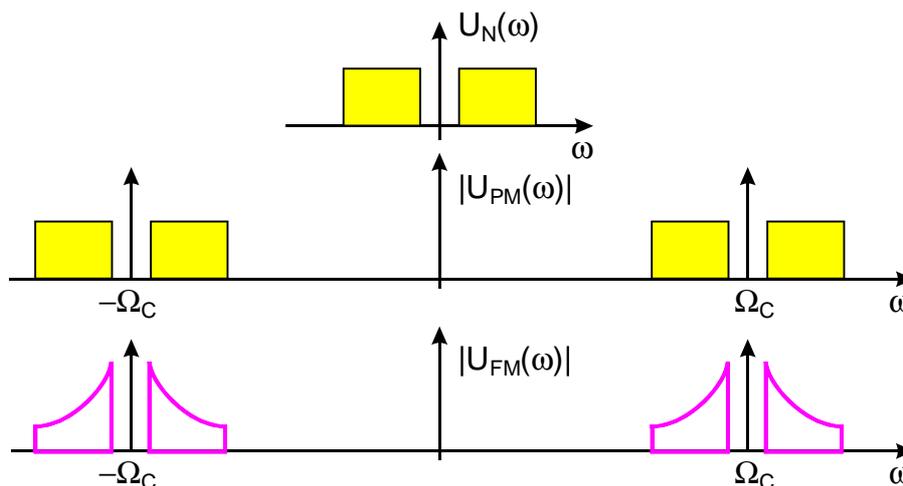


Bild 3.3: Spektralverteilung von Schmalband-PM und Schmalband-FM

Wie man aus Bild 3.3 erkennt, sind im Spektrum der **Schmalband-FM** die zu den höheren Nachrichtenfrequenzen gehörenden Spektralanteile mit geringerer Amplitude vertreten als diejenigen, die zu tieferfrequenten Signalanteilen gehören. Bezüglich der Trägerfrequenz ergibt sich ein **hyperbolischer Verlauf**, wenn die Spektraldichte der Nachricht konstant ist.

Hier erkennt man bereits, daß die Signalamplituden mit höherer Nachrichten-Frequenz bezüglich des Rauschens (und anderer Störungen) benachteiligt sind, weshalb in der Praxis für analoge Übertragung eine **Preemphase** angewendet wird.

### 3.2.2 Digitale Anwendungen der Schmalband-FM

Für Anwendungen, bei denen

- der Wirkungsgrad des Senders eine entscheidende Rolle spielt, wie z.B. beim GSM Handy
- der Sender aus physikalischen Gründen nicht in der Lage ist, Amplitudenänderungen korrekt zu übertragen, wie z.B. bei Wanderfeld-Wellen-Röhren (TWT *travelling wave tube*) im Satelliten-Transponder

kommen Digitale Modulationen zum Einsatz, die physikalisch Schmalband-FM darstellen. Als Namen für solche Digitalen Modulationen haben sich z.B. CPM (*Continuous Phase Modulation*), GMSK (*Gaussian Minimum Shift Keying*) beim GSM Mobilfunk oder FSK (*Frequency Shift Keying*) eingebürgert.<sup>2</sup> Bild 3.4 zeigt das Spektrum für GSM (*Global System for Mobile Communication*) für 2 benachbarte Funk-Kanäle.

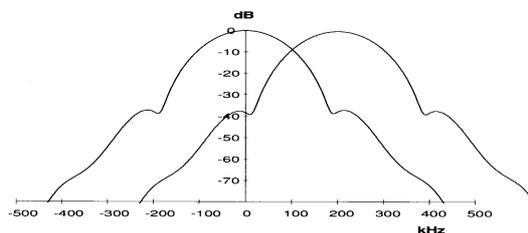


Bild 3.4: Spektralverteilung der GSM für 2 benachbarte Funk-Kanäle. „0“ entspricht der Mittenfrequenz eines Kanals. Der Kanal-Abstand ist 200 KHz.

Typisch für die Schmalband-FM-Spektren ist das Maximum bei Mittenfrequenz und die abnehmenden Amplituden zu beiden Seiten. Ein diskreter Träger wie in Bild 3.3 tritt bei digitalen Signalen i.a. nicht auf.

<sup>2</sup>Aus den Namen der Digitalen Modulationen kann i.a. nicht auf die physikalischen Eigenschaften des Modulationsvorgangs geschlossen werden.

### 3.3 Breitband-Frequenzmodulation

Wegen der engen Verwandtschaft von FM und PM einerseits und der Tatsache andererseits, daß bei praktischen (analogen) Systemen stets eine FM mit Preemphase Verwendung findet, genügt es, vorwiegend die FM zu betrachten.

#### 3.3.1 Breitband-FM mit tieffrequentem Nachrichtensignal

Bei Breitband-FM ist die Änderung des Phasenwinkels:

$$|\varphi(t)| \gg 1 \quad \text{Breitband-FM} \tag{3.11}$$

Eine Näherung wie bei der Schmalband-WM ist damit nicht mehr möglich. Man geht nunmehr von der zeitlichen Frequenzänderung aus, Gleichung (3.5), und betrachtet zusätzlich den Fall, daß sich das Nachrichtensignal **zeitlich nur sehr langsam ändert** und deshalb innerhalb eines Zeitintervalls  $t_1 < t < t_1 + \Delta t$  als praktisch konstant ( $u_N(t) \approx \hat{u}_N$ ) angesehen werden darf.

$$\Delta\varpi(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_{FM} \cdot u_N(t) \rightsquigarrow \Delta\varpi(t) \implies k_{FM} \cdot \hat{u}_N = \Delta\Omega : \text{Frequenz-Hub} \tag{3.12}$$

- $\Delta\Omega$  ist hierbei die maximale Frequenzablage von der Trägerfrequenz  $\Omega_C$  (maximale Frequenzablage = Frequenzhub) und ist eine **Frequenz** — im Unterschied zur Momentanfrequenz  $\varpi(t)$ .
- $\Delta\Omega$  ist hier **zeitunabhängig** und damit eine **echte Frequenz**.

Man kann sich das auch anhand der Realisierung des FM-Modulators klar machen: Da das Nachrichtensignal den Wert der Schwingkreis-Kapazität beeinflusst, erhält man durch Anlegen einer Konstantspannung eine andere Schwingfrequenz. Bei langsamer Änderung der Nachrichtenspannung ändert sich die Schwingfrequenz entsprechend langsam: **Wobbelbetrieb**. In diesem Fall entspricht die **mathematische Größe**  $\varpi(t)$  der **physikalischen Größe**  $\omega$ .

#### 3.3.2 HF-Bandbreite der Breitband-FM

Bei Breitband-FM (mit niederfrequentem Nachrichtensignal) ist die **HF-Bandbreite** daher **proportional zur Amplitude  $\hat{u}_N$  des Nachrichtensignals**.

$$B_{HF} = 2 \cdot k_{FM} \cdot \hat{u}_N \quad \text{Breitband-FM (für niederfrequentes Nachrichtensignal)} \tag{3.13}$$

Die näherungsweise Bestimmung des Spektralverlaufes der Breitband-FM ist an die folgenden **Bedingungen** gebunden.

Es sei wieder ein Nachrichtensignal mit **sehr langsamer Änderung** seines Zeitverlaufes angenommen, Bild 3.5.  $T$  sei die Periode des Nachrichtensignals und  $\Delta\omega = \Delta\Omega$  die maximale Frequenzänderung (Frequenzhub).

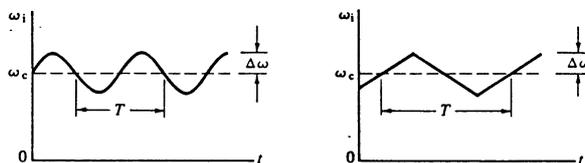


Bild 3.5: Zur Definition des Dispersions-Index

Eine charakteristische Größe ist hierbei der **Dispersions-Index**  $\vartheta$ .

$$\vartheta = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} \cdot T \quad \text{Dispersions-Index} \tag{3.14}$$

Für  $T \rightarrow \infty$  wird  $\vartheta \rightarrow \infty$  und  $u_N(t) \approx const.$

Für den Fall eines **cos-förmigen** Nachrichtensignals  $u_N(t) = \hat{u}_N \cos(\omega_N t)$  wird dieser Dispersions-Index als **Modulations-Index** ( $\eta = \beta = \Delta\varphi$ ) bezeichnet.

$$\boxed{\eta = \beta = \Delta\varphi = \frac{\Delta\Omega}{\omega_N} = \frac{\Delta F}{f_N} \quad \text{Modulations-Index}} \quad (3.15)$$

- Der Ansatz zur Gewinnung der Spektralverteilung des FM-Signals geht von der Überlegung aus, daß die **Größe der Spektraldichte proportional zur Zeitspanne** ist, die bei der jeweiligen Frequenz verbracht wird.

Das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  wird hierfür durch seine **Amplituden-Wahrscheinlichkeits-Dichte-Funktion**  $p(u_N)$  beschrieben. Die zugehörigen Überlegungen sind dabei die folgenden:

1. **Zeitspanne** für  $u_N(t)$  zwischen  $u_{N_1}$  und  $u_{N_1} + du_{N_1}$  ist  $\sim$  zur **Wahrscheinlichkeit**, daß  $u_N(t)$  zwischen  $u_{N_1}$  und  $u_{N_1} + du_{N_1}$  liegt.
2. Mit der Momentanfrequenz  $\varpi(t) = k_{FM} \cdot u_N(t)$  folgt, daß diese zwischen  $\varpi_1$  und  $\varpi_1 + d\varpi$  liegt. ( $\varpi_1 = k_{FM} \cdot u_{N_1}$  und  $d\varpi = k_{FM} \cdot du_{N_1}$ )
3. Da jedoch die Frequenzänderung **relativ langsam** erfolgt, kann  $\varpi_1$  näherungsweise durch  $\omega_1$  ersetzt werden, d.h., die **mathematische Größe**  $\varpi_1$  ist  $\approx$  der **physikalische Größe**  $\omega_1$ .
4. Die in das Intervall  $\omega_1 \cdots \omega_1 + d\omega$  fallende **Teil-Leistung** der FM-Schwingung **ist proportional zu der Zeit**, in der  $u_N(t)$  im Bereich  $u_{N_1} \cdots u_{N_1} + du_{N_1}$  liegt.
5. Sei  $G(\omega)$  die **spektrale Leistungsdichte** der FM-Schwingung, so folgt:  $G(\omega_1)d\omega \sim p(u_{N_1})du_{N_1}$ . Und, da  $d\omega \sim du_{N_1}$  ist, gilt  $G(\omega) \sim p(u_{N_1})$ .
6. **Die spektrale Leistungsdichte der Breitband-FM ist daher von der gleichen Form wie die Wahrscheinlichkeits-Dichte-Funktion des modulierenden Nachrichtensignals.**

Die praktische Vorgehensweise zur Gewinnung der Spektralverteilung des FM-Signals wird anhand von 2 Beispielen gezeigt.

### 3.3.3 Beispiel 1: FM-Spektrum für Cos-förmiges Nachrichtensignal

$$u_N(t) = a \cdot \cos(\omega_N t) \quad ; \quad \omega_N = 2\pi/T \quad (3.16)$$

Die Momentanfrequenz wird dann:

$$\Delta\varpi(t) = k_{FM} \cdot a \cdot \cos(\omega_N t) = \Delta\Omega \cdot \cos(\omega_N t) \quad (3.17)$$

Gleichung (3.17) wird nun wie folgt umgeformt, wodurch die Spektralverteilung gemäß Bild 3.6 entsteht:

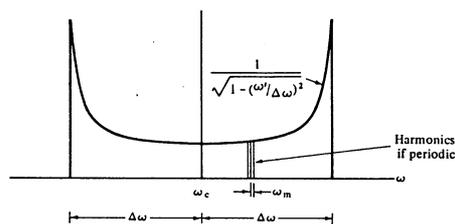


Bild 3.6: Der näherungsweise Verlauf der Spektralverteilung der FM-Schwingung für cos-förmiges Nachrichtensignal (sehr niedriger Frequenz)

$$\begin{aligned} \omega_N t = \frac{2\pi}{T} t &= \arccos\left(\frac{\Delta\varpi(t)}{\Delta\Omega}\right) \\ \frac{1}{T} \cdot \frac{dt}{d[\Delta\varpi(t)]} &= \frac{1/(2\pi)}{\Delta\Omega \sqrt{1 - [\Delta\varpi(t)/\Delta\Omega]^2}} \end{aligned} \quad \text{Spektralverteilung der FM} \quad (3.18)$$

3.3.4 Beispiel 2: FM-Spektrum für Sägezahnförmiges Nachrichtensignal

$$\begin{aligned}
 u_N(t) &= a \frac{t}{T/2} & -T/2 \leq t \leq T/2 \\
 \Delta\varpi(t) &= k_{FM} \cdot a \frac{t}{T/2} = \Delta\Omega \frac{t}{T/2}
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Daraus folgt für die Spektralverteilung, siehe Bild 3.7:

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{dt}{d[\Delta\varpi(t)]} = \frac{1}{2\Delta\Omega} = \text{konstant} \quad \text{Spektralverteilung der FM}
 \tag{3.20}$$

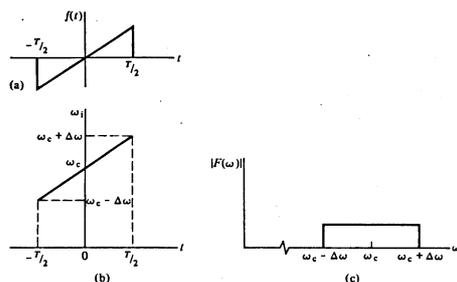


Bild 3.7: Der näherungsweise Verlauf der Spektralverteilung der FM-Schwingung für sägezahnförmiges Nachrichtensignal (sehr niedriger Frequenz)

3.3.5 Spektralverteilung und Bandbreite des FM-Spektrums für den allgemeinen Fall des Nachrichtensignals

Zur Abschätzung der Bandbreite des FM-Spektrums für ein allgemeines Nachrichtensignal  $u_N(t)$  wird dieses näherungsweise durch eine **Treppenkurve** beschrieben, Bild 3.8.

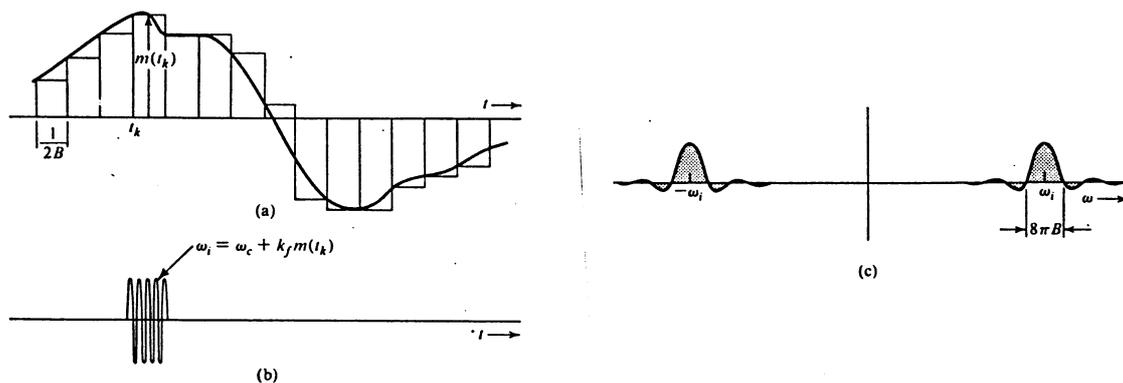


Bild 3.8: Annäherung der FM durch Bursts unterschiedlicher Frequenz zur Abschätzung der Bandbreite

Die **Breite** der Treppenstufen wird dabei gemäß der **Abtastbedingung** gewählt:

$$T_A = \frac{2\pi}{\omega_A} \leq \frac{2\pi}{2\omega_g} = \frac{1}{2B}
 \tag{3.21}$$

Die Höhe der Treppenstufe (Amplitude) bestimmt die **momentane Frequenz**  $\varpi(t)$ , die jedoch als **Frequenz**  $\omega_i$  angesetzt werden darf, da sich **innerhalb** jeder Treppenstufe keine Frequenzänderung ergibt. Dadurch kann das FM-Signal aus **Bursts** der jeweiligen Frequenz zusammengesetzt werden.

Die Spektralanalyse eines jeden Bursts liefert einen an die jeweilige Stelle  $\omega_i$  verschobenen  $(\sin x/x)$ -Impuls, dessen Abstand der 1. Nullstellen (näherungsweise) den gesuchten Wert der Bandbreite ergibt.

$$2 \frac{2\pi}{T_A} = 2\omega_A = 8\pi B \tag{3.22}$$

Da die momentane Frequenz  $\varpi(t) = k_{FM} \cdot u_N(t)$  beträgt, liegt die Spektralverteilung für die Treppennäherung des Nachrichtensignals in folgendem Frequenzbereich, wobei  $u_{N_{\max}}$  das Maximum von  $|u_N(t)|$  bedeuten soll:

$$\boxed{\Omega_C - k_{FM} \cdot u_{N_{\max}} - 4\pi B \leq \omega \leq \Omega_C + k_{FM} \cdot u_{N_{\max}} + 4\pi B} \tag{3.23}$$

### 3.3.6 FM-Bandbreite mit der Carson-Formel

Die erforderliche HF-Bandbreite  $B_{FM}$  für das FM-Signal wird gemäß dieser Abschätzung demnach für die NF-Bandbreite  $B$ :

$$\boxed{2\pi \cdot B_{FM} \approx 2k_{FM} \cdot u_{N_{\max}} + 8\pi B = 2\Delta\Omega + 8\pi B} \tag{3.24}$$

In natürlichen Frequenzen ergibt sich damit:

$$\boxed{\begin{matrix} B_{FM} & \approx & 2\Delta F + 4B & = & 2(\Delta F + 2B) \\ B_{FM} & \approx & 2\Delta F + 2B & = & 2(\Delta F + B) \end{matrix} \quad \text{Abschätzung nach Carson}} \tag{3.25}$$

Speziell für Cosinus-förmiges Nachrichtensignal  $u_N(t) = \hat{u}_N \cos(\omega_N t)$  ergibt sich daraus unter Berücksichtigung des Modulations-Index  $\eta = \beta$ , Gleichung (3.15):

$$\boxed{B_{FM} \approx 2\Delta F + 2f_N = 2(\Delta F + f_N) = 2\Delta F \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \quad \text{Carson-Formel für } u_N(t) = \hat{u}_N \cos(\omega_N t)} \tag{3.26}$$

Die graphische Auswertung der Gleichung (3.26) liefert eine universelle Kurve für die Bandbreite innerhalb der 99% der Spektralanteile einer FM-Schwingung liegen (99%-Bandbreite  $B_{99}$ ), Bild 3.9.

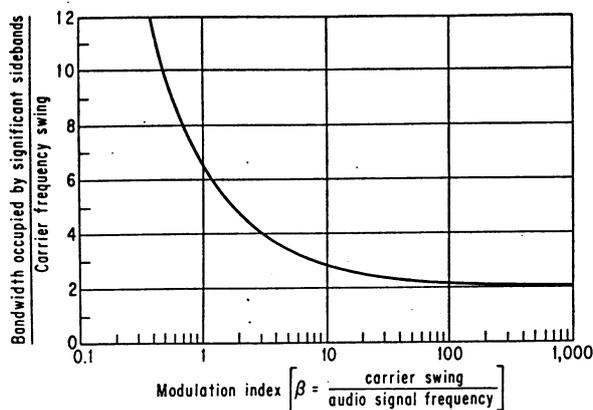


Bild 3.9: Universelle Kurve für die erforderliche 99%-Bandbreite  $B_{99}$  einer FM-Schwingung;  $\beta = \eta$

Typische Spektralverteilungen für Breitband-FM-Signale zeigt Bild 3.10.

Viele technisch interessante Signale  $u_N(t)$  haben zumindest näherungsweise eine Gauß-förmige Wahrscheinlichkeits-Dichtefunktion  $p(u_N)$  für die auftretenden Amplitudenwerte. Meßtechnisch können solche Signale durch Rauschen nachgebildet werden. Da die spektrale Leistungsdichte  $G(\omega)$  der FM die gleiche Form wie die Wahrscheinlichkeits-Dichte  $p(u_N)$  hat, folgt für diesen Fall eine Spektralverteilung gemäß Bild 3.11.

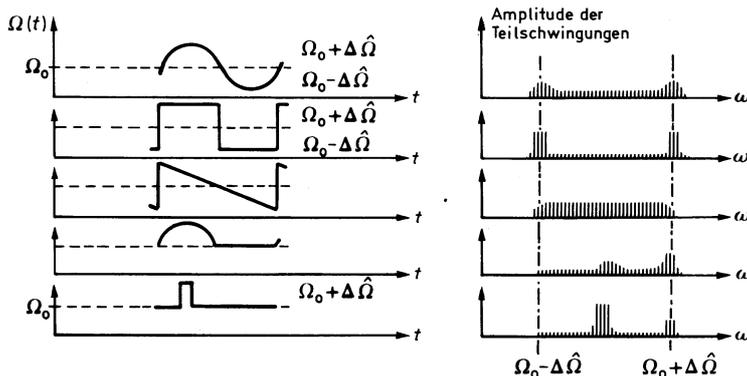


Bild 3.10: Typische FM-Spektren für Breitband-FM

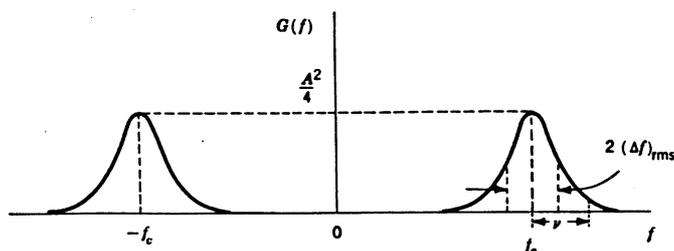


Bild 3.11: Spektralverteilung einer FM mit einem Nachrichtensignal mit Gauß-förmiger Amplitudenverteilung

Für die 98%-Bandbreite eines Signals mit **Gauß-förmiger Amplitudenverteilung** kann daraus folgender Wert gewonnen werden:

$$B_{98} = 2\sqrt{2} \cdot 1.645 \Delta f_{rms} = 4.68 \Delta f_{rms} \quad \text{rms : Effektivwert (root mean square)} \quad (3.27)$$

Für **rechteckförmiges** Nachrichtensignal ergibt sich die folgende Spektralverteilung für das FM-Signal, Bild 3.12, wobei (linke Bildhälfte) der Dispersionsindex  $\vartheta = \frac{\Delta\varpi}{2\pi} \cdot T$  (und damit die Periode  $T$  des Rechtecks) verändert wird, während für die rechte Bildhälfte die Periode  $T$  konstant bleibt, aber die Amplitude der Rechteckschwingung geändert wird.

Aus diesen Beispielen sieht man die Linien-Form des FM-Spektrums für periodische Signale.

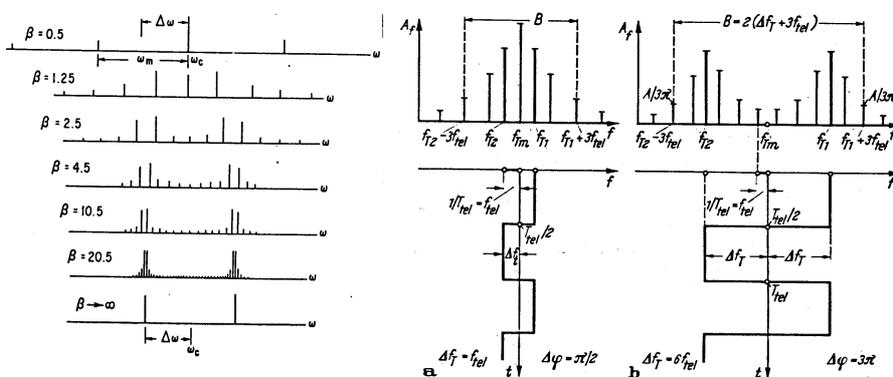


Bild 3.12: Linien-Spektrum eines FM-Signals mit rechteckförmigem (periodischem) Nachrichtensignal

## 4 Klassische Analyse der FM

Im klassischen Fall wird ein **Cos-förmiges Nachrichtensignal** für die Bestimmung des Spektrums einer Winkelmodulation zugrunde gelegt. Seine Bedeutung ergibt sich zudem daraus, daß es für meßtechnische Zwecke verwendet wird.

Nach der Beziehung

$$\boxed{\text{Periodizität im Zeitbereich} \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \text{äquidistante Linien im Frequenzbereich}}$$

wird sich in diesem Fall ein **Linienspektrum** ergeben.

### 4.1 Das FM-Signal im Zeitbereich

Das Nachrichtensignal ist jetzt<sup>1</sup>

$$u_N(t) = \hat{u}_N \cos(\omega_N t) \quad ; \quad \hat{u}_N : \text{NF-Amplitude} \quad (4.1)$$

Bei FM benötigt man nach Gleichung (1.2) das Integral von Gleichung (4.1)

$$\int_0^t u_N(\tau) d\tau = \hat{u}_N \frac{\sin(\omega_N t)}{\omega_N} \quad (4.2)$$

Das FM-Zeitsignal ergibt sich hieraus mit Gleichung (1.4) zu:

$$\boxed{\begin{aligned} u_{FM}(t) &= \hat{U}_C \cdot \cos\left[\Omega_C t + k_{FM} \cdot \frac{\hat{u}_N}{\omega_N} \sin(\omega_N t)\right] \\ &= \hat{U}_C \cdot \cos\left[\Omega_C t + \frac{\Delta\Omega}{\omega_N} \sin(\omega_N t)\right] \\ u_{FM}(t) &= \hat{U}_C \cdot \cos\left[\Omega_C t + \beta \sin(\omega_N t)\right] \end{aligned}} \quad (4.3)$$

In Gleichung (4.3) sind folgende Abkürzungen eingeführt, die für meßtechnische Zwecke eine große Bedeutung haben:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\Omega &= k_{FM} \cdot \hat{u}_N & : & \text{(Kreis-) Frequenzhub} \\ \beta = \eta &= \frac{\Delta\Omega}{\omega_N} = \frac{\Delta F}{f_N} & : & \text{Modulations-Index} \end{aligned}} \quad (4.4)$$

Der Modulations-Index ist der Phasenhub der FM, also gilt (mit verschiedenen in der Literatur üblichen Bezeichnungen):

$$\boxed{\beta = \eta = \Delta\varphi = \Delta\Phi = \frac{k_{FM} \cdot \hat{u}_N}{\omega_N} \quad \text{Phasenhub} = \text{Modulations-Index}} \quad (4.5)$$

### 4.2 Die Pendelzeigerdarstellung der FM

In komplexer Schreibweise wird aus Gleichung (4.3):

$$\boxed{\underline{u}_{FM}(t) = \hat{U}_C \cdot \underbrace{e^{j\Omega_C t}}_{\text{Drehung}} \cdot \underbrace{e^{j\beta \sin(\omega_N t)}}_{\text{Pendelbewegung}}} \quad (4.6)$$

Man denkt sich dabei die Ebene mit der Frequenz  $\Omega_C$  rotierend, entsprechend zu einem **stroboskopischen** Bild einer **rotierenden Scheibe** mit einer **Pfeilmarkierung**, und erhält dann das Bild einer Sin-förmigen **Pendelbewegung** des Zeigers, Bild 4.1. Die Zeigerlänge entspricht der Amplitude  $\hat{U}_C$  der FM-Schwingung.

Da der maximale Phasenwinkel  $\Delta\varphi = \beta \sim \hat{u}_N$  ist, erhält man für feste NF-Frequenz  $\omega_N = \text{const}$  Pendelzeigerausschläge proportional zur NF-Amplitude.

<sup>1</sup>Es ist genauso gut möglich, das Nachrichtensignal als  $\sin(\omega_N t)$  anzusetzen; schließlich könnte man auch das Trägersignal Sin-förmig annehmen. Somit ergeben sich insgesamt 4 Kombinationsmöglichkeiten. Bei FM-Spektren, die in der Literatur angegeben werden, ist das zu beachten.

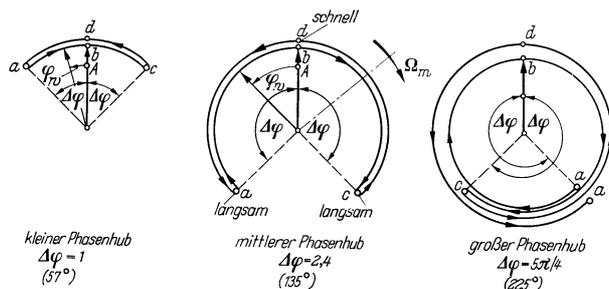


Bild 4.1: Pendelzeigerdiagramme für verschiedene maximale Phasenauslenkung

Da aber auch  $\Delta\varphi \sim 1/\omega_N$  ist, kann man genauso für feste NF-Amplitude zu den verschiedenen Pendelzeigerdiagrammen des Bildes 4.1 kommen, wenn die NF-Frequenz entsprechend verändert wird. Ein Pendelzeigerdiagramm ist ja auch nur eine **Momentaufnahme** aus welcher die tatsächliche Bewegung nicht ohne weiteres entnommen werden kann.

**4.2.1 Pendel-Zeiger bei Breitband-FM**

Bei Breitband-FM ist  $\Delta\varphi \gg 1$ . Daher sind dann in dem Pendelzeigerbild mehrfache volle Umdrehungen des Pendelzeigers möglich. In einem solchen Fall kann man annehmen, daß pro Umdrehung sich die Winkelgeschwindigkeit nicht merklich ändert. Damit hat man dann zu diesen Zeitpunkten praktisch eine konstante Winkelgeschwindigkeit und damit eine konstante Frequenz. In diesen Fällen kann man dann die Momentanfrequenz  $\varpi(t)$  durch die entsprechende Frequenz  $\omega$  ersetzen. Diese Annahmen wurden bei der Bestimmung der Spektralverteilung einer Breitband-FM angewendet.

**4.2.2 Zerlegung des Pendelzeigerdiagramms in seine Inphasen- und Quadratur-Komponente**

Entsprechend zur Gleichung (2.2) läßt sich auch der Pendelzeiger in eine Inphasen-Komponente  $I(t)$  und eine Quadratur-Komponente  $Q(t)$  aufspalten, Bild 4.2. (Amplitude der WM-Schwingung:  $A = \hat{U}_C$ )

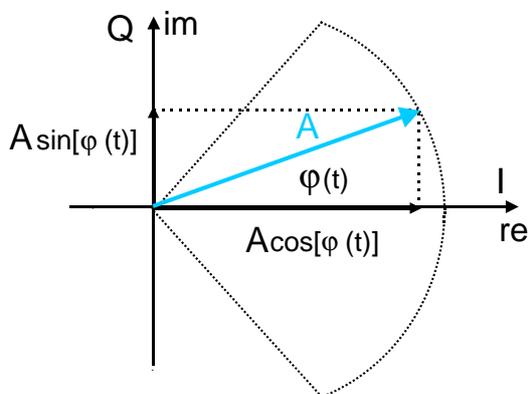


Bild 4.2: Zerlegung eines Pendelzeigers in seine Inphasen- und Quadratur-Komponente.  $A = \hat{U}_C$

Aus Bild 4.2 liest man ab:

$I(t) = \hat{U}_C \cos[\varphi(t)]$	<b>Inphase-Komponente</b>	(4.7)
$Q(t) = \hat{U}_C \sin[\varphi(t)]$	<b>Quadratur-Komponente</b>	

Wird in Gleichung (4.7)  $\varphi(t) \sim u_N(t)$  gewählt, so erhält man eine Phasenmodulation. Für den Zeiger erhält man hiermit:

$$\underline{u}_{PM}(t) = [I(t) + jQ(t)] \cdot e^{j\Omega_C t} \tag{4.8}$$

Die Zerlegung in die beiden orthogonalen Komponenten gilt für **beliebige Werte des Phasenwinkels** (= Modulationsindex)  $\Delta\varphi = \beta$ . Die Projektionen des I-Zeigers bzw. Q-Zeigers liefern die zugehörigen Zeitverläufe der I- bzw. Q-Komponente, Bild 4.3.

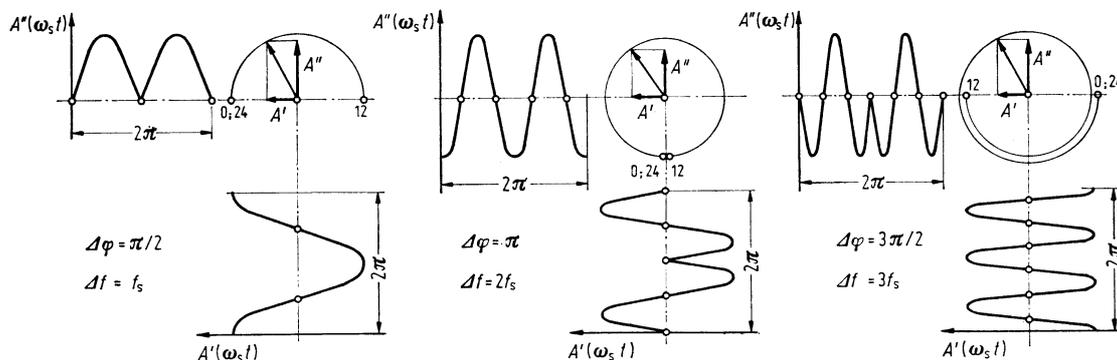


Bild 4.3: Der zeitliche Verlauf der I- und Q-Komponenten für Winkelmodulationen mit unterschiedlichen Phasenhuben.

Die Zeitverläufe der I-Komponenten und der Q-Komponenten sind typische Beispiele für die I und Q Signale im Phasenmodulator nach Bild 2.8, falls  $\varphi(t)$  einen cos-förmigen Zeitverlauf hat.

### 4.3 Die Spektralverteilung des FM-Signals für Cos-förmiges Nachrichtensignal

Die Gleichung für das FM-Zeitsignal, Gleichung (4.3), wird hierzu mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung  $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$  aufgespalten. Diese Aufspaltung ist identisch zu der in Gleichung (2.2), in welcher aber noch allgemein  $\varphi(t)$  steht.

$$\begin{aligned}
 u_{FM}(t) &= \hat{U}_C \cdot \cos[\Omega_C t + \beta \sin(\omega_N t)] \\
 &= \hat{U}_C \cos(\Omega_C t) \cos[\beta \sin(\omega_N t)] - \hat{U}_C \sin(\Omega_C t) \sin[\beta \sin(\omega_N t)]
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Diese Aufspaltung liefert wieder die Inphase- und Quadratur-Komponenten.

$  \begin{aligned}  I(t) &= \hat{U}_C \cos[\beta \sin(\omega_N t)] \\  Q(t) &= \hat{U}_C \sin[\beta \sin(\omega_N t)]  \end{aligned}  $	<b>Inphase-Komponente</b> <b>Quadratur-Komponente</b>	(4.10)
---	--	--------

Die Inphase- und Quadratur-Komponenten werden nun in komplexer Schreibweise zu der **komplexen Einhüllenden**  $\underline{E}_{FM}(t)$  der Winkelmodulation zusammengefaßt, woraus sich auch sofort wieder der Zeitverlauf der modulierten Schwingung gewinnen läßt.

$  \begin{aligned}  \underline{E}_{FM}(t) &= I(t) + jQ(t) && \text{komplexe Einhüllende} \\  &= \hat{U}_C \cdot e^{j\beta \sin(\omega_N t)} \\  u_{FM}(t) &= \Re \{ \underline{E}_{FM}(t) \cdot e^{j\Omega_C t} \}  \end{aligned}  $	(4.11)
--	--------

Aus Gleichung (4.11) entnimmt man unmittelbar:

- $\underline{E}_{FM}$  enthält die vollständige Information über den Modulationsprozess, denn  $u_{FM}(t)$  läßt sich aus  $\underline{E}_{FM}(t)$  eindeutig rückgewinnen.
- $|\underline{E}_{FM}(t)| = \hat{U}_C = const.$ , wie es für eine winkelmodulierte Schwingung sein muß.
- Geometrisch ist die komplexe Einhüllende  $\underline{E}_{FM}(t)$  die **Ortskurve** des Amplitudenzeigers  $\vec{A}(t)$  in Bild 4.2.
- **Die komplexe Einhüllende hat die Periodizität des Nachrichtensignals**, hier einer Cos-Schwingung, wie man auch aus der Pendelzeigerdarstellung, Bild 4.3, sieht.

- Damit ist  $\underline{E}_{FM}(t)$  periodisch und läßt sich daher in eine **Fourier-Reihe** zerlegen.

Die Entwicklung in eine (komplexe) Fourier-Reihe lautet:

$$\underline{E}_{FM}(t) = \hat{U}_C \cdot e^{j\beta \sin(\omega_N t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_N t} \quad (4.12)$$

Die Koeffizienten  $C_n$  dieser Reihenentwicklung müssen jedoch nicht extra berechnet werden, weil aus der Theorie der **Besselschen Funktionen** folgende Beziehung bekannt ist ( $J_n(\beta)$ : Besselfunktion 1. Art, n. Ordnung):

$$e^{j\beta \sin(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot e^{jn x} \quad (4.13)$$

Damit sind die Koeffizienten  $C_n$  der Reihenentwicklung:

$$C_n = \hat{U}_C \cdot J_n(\beta) \quad (4.14)$$

Folglich gilt für die komplexe Einhüllende:

$$\underline{E}_{FM}(t) = \hat{U}_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot e^{jn\omega_N t} \quad (4.15)$$

Aus Gleichung (4.11) erhält man somit für die Zeitfunktion der FM-Schwingung

$$\begin{aligned} u_{FM}(t) &= \hat{U}_C \cdot \Re \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_N t} \cdot e^{j\Omega_C t} \right\} \\ &= \hat{U}_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[(\Omega_C + n \cdot \omega_N)t] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Der 2. Ausdruck in Gleichung (4.16) läßt sich direkt Fourier-transformieren, wodurch man die **Spektralverteilung der Cos-förmig modulierten FM** erhält.

$$U_{FM}(\omega) = \frac{\hat{U}_C}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \{ \delta(\omega - \Omega_C - n \cdot \omega_N) + \delta(\omega + \Omega_C + n \cdot \omega_N) \} \quad (4.17)$$

Eine Analyse der Gleichung (4.17) zeigt, daß das FM-Spektrum einer mit Cos-förmigem Signal modulierten FM-Schwingung (in Abhängigkeit von  $\beta$  und damit von der NF-Amplitude und/oder der NF-Frequenz) aus **einer Trägerlinie und vielen Seitenlinienpaaren** besteht. Die **Größe dieser Linien** wird (außer durch  $\hat{U}_C$ ) wie folgt festgelegt:

- Trägerlinie : durch  $J_0(\beta)$
- 1. Seitenlinienpaar : durch  $J_1(\beta)$
- 2. Seitenlinienpaar : durch  $J_2(\beta)$
- usw. für alle weiteren Seitenlinienpaare

Aus Gleichung (4.17) scheint zunächst zu folgen, daß das mit Hilfe der Besselfunktionen gewonnene FM-Spektrum theoretisch aus  $\infty$  vielen Linien besteht. Daß dem praktisch nicht so ist, geht aber bereits aus den vorausgegangenen Abschätzungen für die Spektralverteilung der Winkelmodulationen hervor. Der scheinbare Widerspruch löst sich auf, wenn man die Besselfunktionen näher betrachtet.

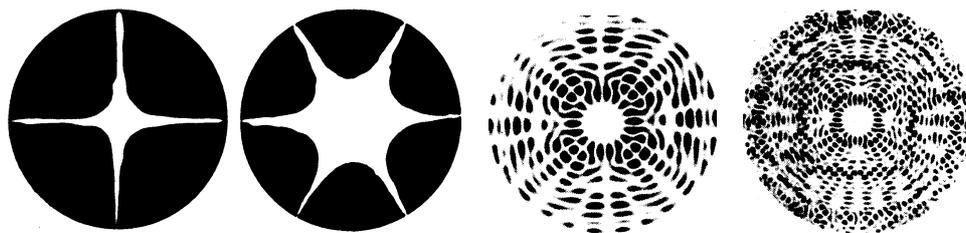


Bild 4.4: Beispiele für Chladni'sche Klangfiguren

### 4.3.1 Die Besselfunktionen

Die Besselfunktionen (Zylinderfunktionen) dienen ursprünglich der Beschreibung mechanischer Schwingungsformen, wie sie z.B. entstehen, wenn eine kreisrunde Scheibe, die zuvor bestäubt wurde, z.B. mittels eines Geigenbogens zu akustischen Schwingungen angeregt wird.

In den Knotenlinien der Schwingung bleibt der Staub liegen, Bild 4.4. Diese „Chladni'schen Klangfiguren“ wurden bereits 1787 entdeckt.

Die für die Winkelmodulationen interessante 1. Art der Besselfunktionen ( $J_n$  : 1. Art, n. Ordnung) kann z.B. wie folgt berechnet werden.

$$J_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \cdot \left(\frac{\beta}{2}\right)^{n+2k} \tag{4.18}$$

Mit

$$\beta = k_{FM} \cdot \hat{u}_N / \omega_N$$

geht die NF-Amplitude  $\hat{u}_N$  **direkt** und die NF-Frequenz  $\omega_N$  **reziprok** in den Wert von  $\beta$  ein.

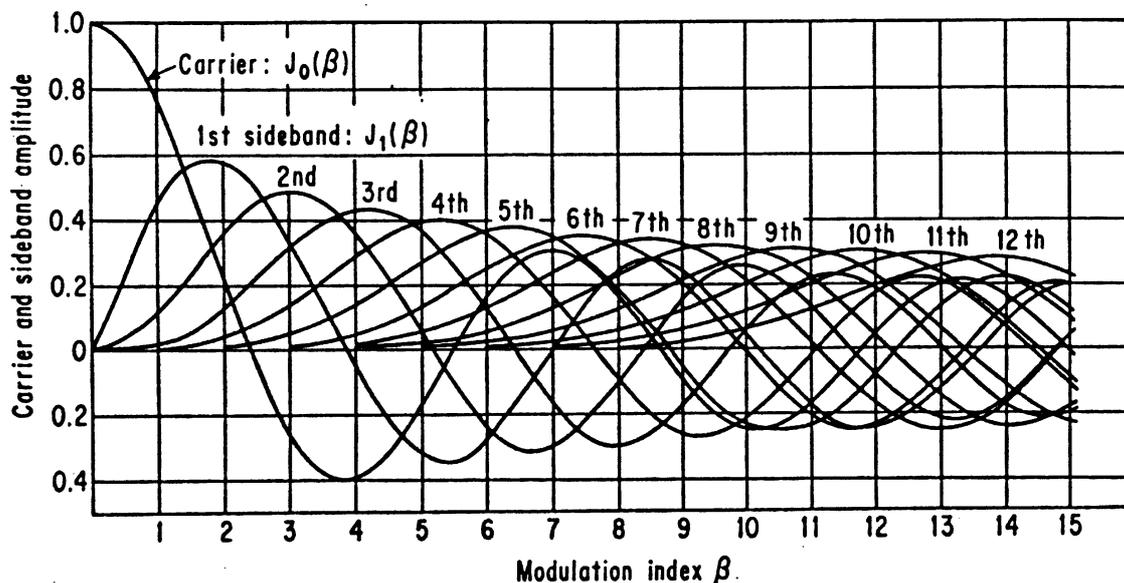


Bild 4.5: Besselfunktionen 1. Art als Funktion des Arguments  $\beta$

Den Verlauf der Besselfunktionen kann man Bild 4.5 entnehmen. Ein **negativer** Wert der Besselfunktionen bedeutet, daß die zugehörigen Linien **gegenphasig** für diese Werte von  $\beta$  sind. Auf die Phasenbeziehungen der Linien untereinander wird später eingegangen. Bei der üblichen Spektraldarstellung werden nur **Beträge** gezeichnet. Dies geschieht in Übereinstimmung mit der Anzeige eines Spektrumanalyzers.

Aus der 3-dimensionalen Darstellung der Besselfunktionen in Bild 4.6 sieht man deutlich, daß die Besselfunktionen mit höherer Ordnungszahl  $n$  erst bei größeren Werten des Modulationsindex  $\beta = \eta = \Delta\Phi$  wesentlich von 0 verschiedene Werte haben.

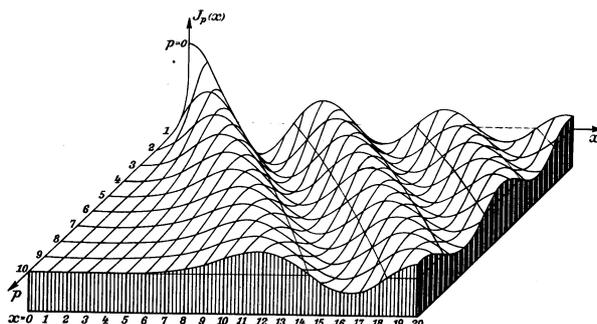


Bild 4.6: Dreidimensionale Darstellung der Besselfunktionen

In einer weiteren Darstellung, Bild 4.7, kann man schließlich erkennen, daß die Besselfunktionen der Ordnung  $n$  erst ab  $\beta > n/2$  merkbare Werte annehmen. Somit wird klar, daß das FM-Spektrum gemäß Gleichung (4.17) praktisch aus einer **endlichen Anzahl** von Linien besteht.

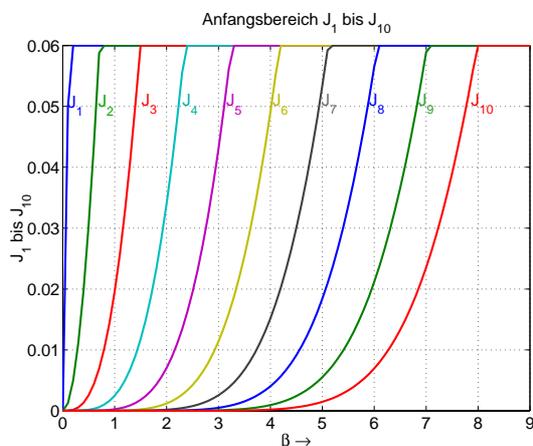


Bild 4.7: Anfangsbereiche der Besselfunktionen für kleine Werte bis 0,06

Da der Modulationsindex  $\beta$  von der Signalamplitude  $\hat{u}_N$  abhängt, hat das FM-Spektrum mit steigender Signalamplitude immer mehr Seitenlinien, da dann immer mehr Besselfunktionen höherer Ordnung  $n$  von 0 verschieden sind.

Andererseits hat die Zeitfunktion der FM-Schwingung eine **konstante Amplitude** und damit eine **konstante Leistung**.

Da nach dem **Parseval'schen Theorem** die Leistung im **Zeitbereich** gleich der Leistung im **Frequenzbereich** ist, kann die Größe der (vorhandenen) Linien nicht unverändert bleiben, wenn neue Linien hinzukommen. Für die Gesamtheit aller Linien eines FM-Spektrums gilt die Beziehung:

$$P \sim U_C^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = const. \quad \rightsquigarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = J_0^2(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} 2J_n^2(\beta) = 1 \tag{4.19}$$

Daraus erklärt sich qualitativ, daß sich — mit wachsendem  $\beta$  — die Größe aller Linien ändert und insbesondere auch zu 0 werden kann (Nullstellen der Besselfunktionen). Diese Nullstellen der Besselfunktionen, Bild 4.8, sind insbesondere **meßtechnisch** von Interesse, da sich die Nullstelle einer Linie (in Abhängigkeit von  $\beta$ ) mit Hilfe eines selektiven Voltmeters (Pegelempfänger) oder eines Spektrumanalyzers sehr exakt bestimmen läßt.

Da die Information bei einer Modulation nicht im Träger, sondern in den Seitenlinien steckt, ist das Verhältnis von Trägerleistung zu Seitenbandleistung interessant, Bild 4.9. Die Nullstellen der Trägerleistung für  $\beta = 2,4048$ ;  $\beta = 5,5201$ ;  $\beta = 8,6537$  sind meßtechnisch zur Bestimmung der Modulatorkonstante  $k_{FM}$  von Interesse, siehe Kapitel 5.2 (Seite 33).

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$J_n(x) = 0$ Nullstellen	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715	9.9361
	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386	13.5893
	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002	17.0038
	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801	20.3208
	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178	23.5861
	18.0711	19.6159	21.1170	22.5827	24.0190	25.4303	26.8202
$J'_n(x) = 0$ Extrema	0.0000	1.8412	3.0542	4.2012	5.3176	6.4156	7.5013
	3.8317	5.3314	6.7061	8.0152	9.2824	10.5199	11.7349
	7.0156	8.5363	9.9695	11.3459	12.6819	13.9872	15.2682
	10.1735	11.7060	13.1704	14.5859	15.9641	17.3128	18.6374
	13.3237	14.8636	16.3475	17.7888	19.1960	20.5755	21.9317
	16.4706	18.0155	19.5129	20.9725	22.4010	23.8036	25.1839

Bild 4.8: Nullstellen und Extrema der Besselfunktionen

Die FM hat also ein günstiges Verhältnis von Seitenbandleistung zu Trägerleistung, besonders da  $\beta$  bei analogen Frequenzmodulationen meist groß ist. Im Unterschied dazu hat ein AM-Sender bei  $m = 1$  (100% Amplituden-Modulation) ein Verhältnis von Trägerleistung / Seitenbandleistung von 1:(0,5). Im Unterschied zu einem AM-Sender gibt es bei einem FM-Sender keine „Übermodulation“ in diesem Sinne. Es darf allerdings der vorgeschriebene maximale Frequenzhub  $\Delta\Omega_{\max}$  bzw.  $\Delta F_{\max}$  nicht überschritten werden, damit es zu keinen Nachbarkanalstörungen kommt.

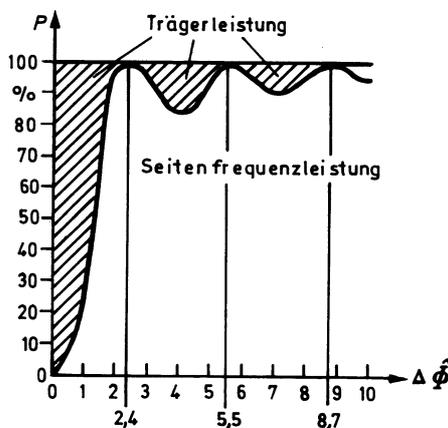


Bild 4.9: Trägerleistung zu Seitenbandleistung in Abhängigkeit vom Phasenhub (Modulationsindex)

### 4.3.2 Bestimmung des FM-Spektrums aus den Besselfunktionen

Aufgrund der Eigenschaften des Modulators:  $k_{FM}$  und des Signals:  $\hat{u}_N$  und  $\omega_N$  gewinnt man den zugehörigen Phasenhub  $\beta$

$$\beta = \frac{k_{FM} \cdot \hat{u}_N}{\omega_N} = \frac{\Delta\Omega}{\omega_N} = \frac{\Delta F}{f_N} \tag{4.20}$$

Mit dem so erhaltenen Wert für  $\beta$  geht man in die Besselkurven und liest (betragsmäßig) die Größe der Linien aus, Bild 4.10. Bei der Darstellung des Bildes 4.10 wurde die Eigenschaft der Besselfunktionen:

$J_{-n}(x) = -J_n(x)$  für  $n$  **ungerade**, was zu negativen Linien führt, sowie der Faktor  $1/2$  aus der Spektralzerlegung, Gleichung (4.17) berücksichtigt. In Übereinstimmung mit der Anzeige eines Spektumanalyzers wird jedoch meist der **Betrag** des FM-Spektrums aufgezeichnet. Das gleiche Spektrum für  $\beta = 5$ , jetzt betragsmäßig gezeichnet, dafür aber in der zweiseitigen Darstellung (negative Frequenzen), zeigt Bild 4.11.

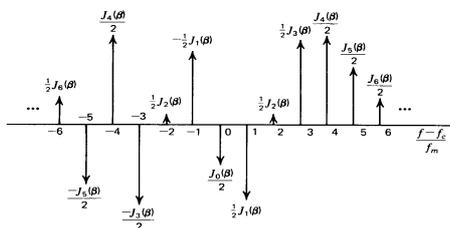


Bild 4.10: Die Größe der Spektrallinien aus den Besselkurven für  $\beta = 5$

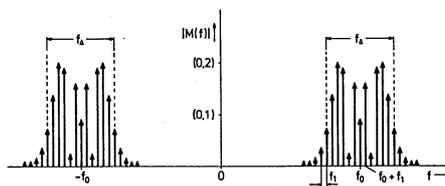


Bild 4.11: Betrag des FM-Spektrums für  $\beta = 5$  in zweiseitiger Darstellung

In der Modulationstechnik beschränkt man sich allerdings häufig auch noch auf eine einseitige Darstellung (ohne die negativen Frequenzen)<sup>2</sup>. Die sich dann ergebenden Spektralverteilungen zeigt Bild 4.12.

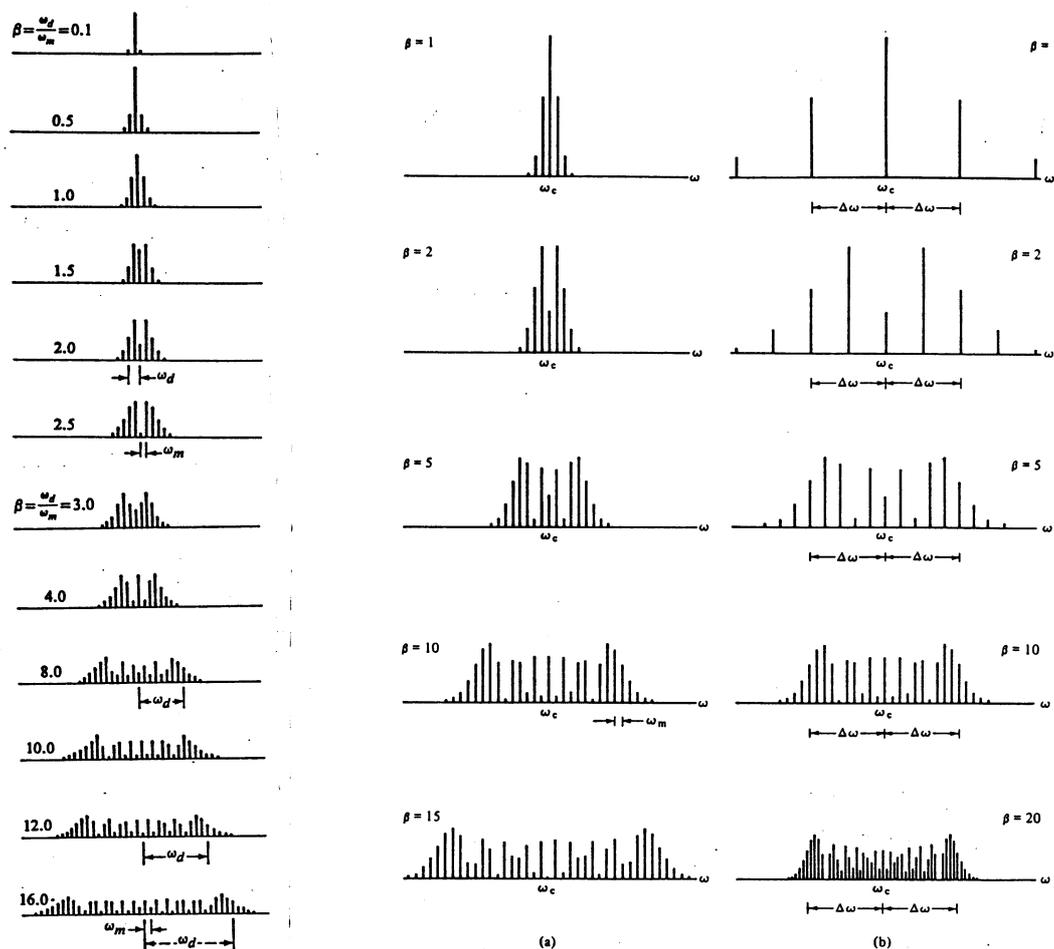


Bild 4.12: Beispiele für FM-Spektren mit konstanter NF-Frequenz  $\omega_N$  und mit konstantem Frequenzhub  $\Delta\Omega$

<sup>2</sup>Beim Problem der Frequenzumsetzung tritt eine Faltung auf. Hierfür ist dann aber in jedem Fall mit zweiseitiger Darstellung zu arbeiten!

Der Frequenzhub  $\Delta\Omega$  lässt sich in Bild 4.12 recht bequem bestimmen. Mit Gleichung (4.20) wird durch einfache Umstellung:

$$\boxed{\Delta\Omega = \beta \cdot \omega_N} \tag{4.21}$$

Da der Modulationsindex  $\beta$  und der Linienabstand  $\omega_N$  bekannt sind, hat man sofort den Frequenzhub  $\Delta\Omega$ .

### 4.4 Das FM-Spektrum bei Zweitonaussteuerung

Das Nachrichtensignal  $u_N(t)$  bestehe aus 2 Cos-Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen  $\omega_m \gg \omega_n$ , die in einem nicht ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen sollen, d.h.  $\omega_m \neq k \cdot \omega_n$ :

$$u_N(t) = \hat{u}_N \cos(\omega_m t) + A_n \cos(\omega_n t) \tag{4.22}$$

Die Zeitfunktion der FM-Schwingung wird damit:

$$u_{FM}(t) = \hat{U}_{Tr} \cos[\Omega_{Tr} t + \beta_m \cdot \sin(\omega_m t) + \beta_n \cdot \sin(\omega_n t)] \tag{4.23}$$

Die komplexe Einhüllende der FM-Schwingung wird dann:

$$\boxed{\underline{E}_{FM}(t) = \hat{U}_{Tr} \cdot e^{j\beta_m \sin(\omega_m t)} \cdot e^{j\beta_n \sin(\omega_n t)}} \tag{4.24}$$

Aus der komplexen Einhüllenden erkennt man, daß im Zeitbereich eine **Multiplikation** zweier Zeitfunktionen besteht. Das Spektrum der FM kann daher mit Hilfe der **Faltung** aus den jeweiligen FM-Spektren der für Einzeltonmodulation gewonnen werden, wie Bild 4.13 zeigt. In der Praxis tritt dieser Fall z.B. dann auf, wenn ein FM-Rundfunksender den *Stereopiloten* aussendet, aber das Nachrichtensignal in *Mono* vorliegt, wie z.B. beim Zeitzeichen. Wie man aus Bild 4.13 erkennt, wird dabei nicht nur der FM-Träger moduliert, sondern auch alle durch den Stereo-Piloten entstandenen Linien.

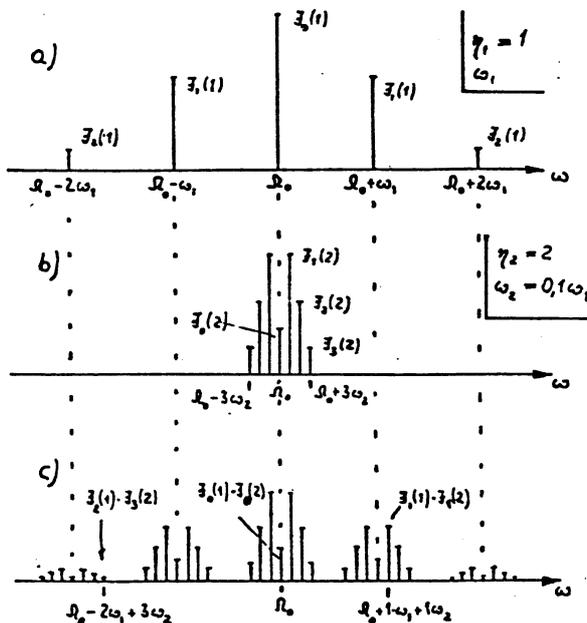


Bild 4.13: Amplitudenspektren bei Zweitonaussteuerung. Im Beispiel ist die Faltungsoperation gut zu erkennen.

Die Anzahl der Linien bei Zweitonaussteuerung ergibt sich aus dem Produkt der Linienzahlen für die jeweilige Einzeltonaussteuerung. Bei mehr als 2 Cos-förmigen Nachrichtensignalen wird die hier gewählte Methode zur Gewinnung des FM-Spektrums schnell unübersichtlich, so daß man besser auf die im vorigen Kapitel gezeigten Näherungen zurückgreift.

### 4.5 Das Zeigerdiagramm der FM

Im Unterschied zum **Pendelzeiger** der FM, Bild 4.1, bei dem die **zeitliche Bewegung** des komplexen FM-Zeigers betrachtet wird<sup>3</sup>, setzt sich das **Drehzeigerdiagramm** der FM aus den Zeigern des Trägers ( $\sim J_0(\beta)$ ), sowie sämtlichen Seitenbandzeigern ( $\sim J_n(\beta), n = 1, 2, \dots$ ) zusammen, also aus den Bestandteilen des FM-Spektrums. Da die Seitenlinien jeweils unterschiedliche Frequenzen haben, ergeben sich **Relativdrehungen** der Zeiger zueinander. Das Drehzeigerdiagramm FM entspricht insofern dem Zeigerdiagramm der AM. Es entspricht einer Darstellung im Frequenzbereich, da sich in ihm die Eigenschaften des FM-Spektrums widerspiegeln. Wegen der zeitlichen Bewegung der Zeiger gestattet das Drehzeigerdiagramm auch einen **Übergang vom Frequenzbereich in den Zeitbereich**.

#### 4.5.1 Das Drehzeigerdiagramm für Schmalband-FM

Bei Schmalband-FM ist  $\beta \ll 1$ . Damit wird aus Gleichung (4.10) entsprechend zu Gleichung (2.3)

$$\begin{cases} I(t) \approx \hat{U}_{Tr} \\ Q(t) \approx \hat{U}_{Tr} \cdot \beta \sin(\omega_N t) \end{cases} \tag{4.25}$$

Hieraus bestimmt sich die komplexe Einhüllende zu:

$$\underline{E}_{FM}(t) = I(t) + jQ(t) \approx \hat{U}_{Tr}[1 + j\beta \sin(\omega_N t)] \tag{4.26}$$

Für die Zeitfunktion berechnet sich damit:

$$\begin{aligned} u_{FM}(t) &\approx \hat{U}_{Tr}[\cos(\Omega_{Tr}t) - \beta \sin(\Omega_{Tr}t) \cdot \sin(\omega_N t)] \\ &\approx \hat{U}_{Tr} \left\{ \cos(\Omega_{Tr}t) - \frac{\beta}{2} \cos[(\Omega_{Tr} - \omega_N)t] + \frac{\beta}{2} \cos[(\Omega_{Tr} + \omega_N)t] \right\} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Aus der Zeitfunktion erhält man das zugehörige Zeigerdiagramm.

$$\underline{u}_{FM}(t) = \hat{U}_{Tr} \left\{ e^{j\Omega_{Tr}t} - \frac{\beta}{2} e^{j(\Omega_{Tr} - \omega_N)t} + \frac{\beta}{2} e^{j(\Omega_{Tr} + \omega_N)t} \right\} \tag{4.28}$$

Gegenüber dem Zeigerdiagramm der AM hat ein Seitenbandzeiger **negatives Vorzeichen**. Die Schwingungsebene der 1. Seitenbandzeiger ist also um  $90^\circ$  gegenüber dem Trägerzeiger gedreht, so daß sich folgendes Bild ergibt, Bild 4.14.

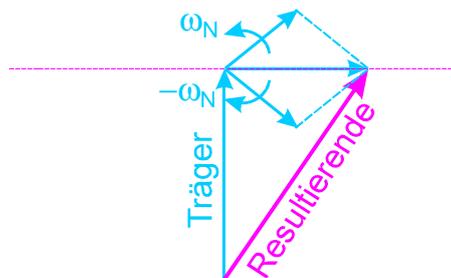


Bild 4.14: Das Zeigerdiagramm der Schmalband-FM/PM

Mit nur einem Seitenband-Zeigerpaar läuft der Summenzeiger nicht auf einer Kreislinie, sondern nur noch **tangential** dazu. Hierdurch entstehen Amplituden- und Phasen-Fehler. Für FM ist der **Phasenfehler** entscheidend, da der Amplitudenfehler mittels eines Begrenzerverstärkers beseitigt werden kann.

Die Blockschaltung, mit deren Hilfe eine Schmalband-PM erzeugt werden kann, wurde bereits in Bild 2.9 auf Seite 10 vorgestellt. Um eine Schmalband-FM zu erzeugen, muß zuvor noch das Nachrichtensignal integriert werden, siehe Bild 1.5 auf Seite 4. Dies kann man auch aus dem Zeigerdiagramm in Bild 4.14 erkennen, bei dem die Phasenauslenkung unabhängig von der Umlaufgeschwindigkeit der Seitenband-Zeiger ist.

<sup>3</sup>Der Pendelzeiger entspricht einer Darstellung der FM im Zeitbereich.

### 4.5.2 Das Drehzeigerdiagramm der Breitband-FM

Bei Breitband-FM ist  $\beta \gg 1$ . Man geht wieder von der komplexen Einhüllenden aus, Gleichungen (4.11, 4.12) und wählt zur Abkürzung  $\beta \sin(\omega_N t) = x$  :

$$\underline{E}_{FM}(t) = \hat{U}_{Tr} e^{j\beta \sin(\omega_N t)} = \hat{U}_{Tr} e^{jx} \tag{4.29}$$

Den Ausdruck  $e^{jx}$  kann man in eine Reihe entwickeln und wie folgt interpretieren:

$$e^{jx} = 1 + jx + \frac{j^2 x^2}{2} + \frac{j^3 x^3}{6} + \dots \tag{4.30}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0^0 & 90^0 & 180^0 & 270^0 \\ J_0 & J_1 & J_2 & J_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Drehung der Schwingungsebene} \\ \text{Zeigerlängen gemäß Bessel} \end{matrix}$

Die Schwingungsebene der einzelnen Seitenbandzeiger dreht also jeweils um  $90^0$  weiter. Hierbei ist folgendes zu beachten:

- Die Länge der Zeiger ist aus den Besselfunktionen für den betreffenden Modulationsindex  $\beta$  zu entnehmen.
- Der Trägerzeiger ist einmal zu nehmen, alle **Seitenbandzeiger** aber **doppelt**.
- **Negatives Vorzeichen** einer Besselfunktion führt zu **negativem Vorzeichen für den Winkel der Schwingungsebene** für das betreffende Zeigerpaar. Also ist hierfür die Richtung umzudrehen.
- Günstig ist es, die Drehzeiger in einer Extremlage zu zeichnen.

Die Richtungen der Schwingungsebenen werden besonders deutlich, wenn man die rechtsseitige (oder linksseitige) Maximalauslenkung  $\pm\beta = \pm\Delta\Phi$  betrachtet. In dieser Art sind die Drehzeigerdiagramme üblicherweise gezeichnet.

Den Zusammenhang zwischen Bessel-Spektrum und Drehzeigerdiagramm (rechtsseitige Extremlage) zeigt Bild 4.15. Der resultierende Zeiger entspricht dem Pendelzeiger. Dies kann als Kontrolle für die fehlerfreie Konstruktion des Drehzeigerdiagramms verwendet werden.

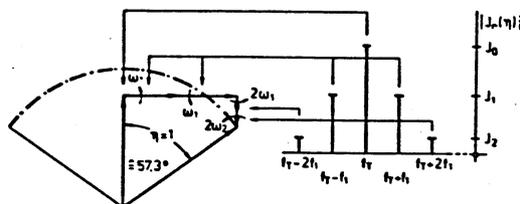


Bild 4.15: Besselspektrum und Drehzeigerdiagramm

Beispiele für andere Werte des Modulationsindex  $\beta$  zeigt Bild 4.16. Man beachte die Umkehrung der jeweiligen Schwingungsrichtung, falls die zugehörige Besselfunktion einen negativen Wert hat.

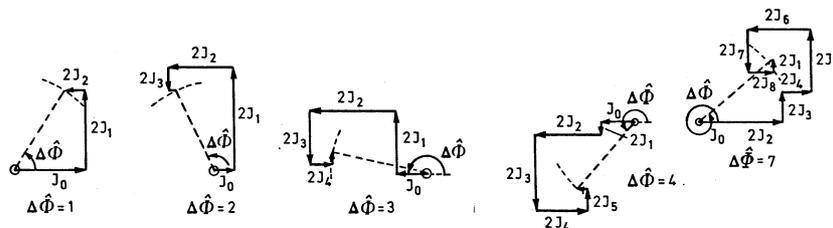


Bild 4.16: Beispiele für Drehzeigerdiagramme

### 4.6 Verzerrungen der FM bei der Übertragung

Die **linearen Verzerrungen**, die eine FM-Schwingung beim Durchgang durch ein lineares Übertragungssystem (Filter usw.) erleidet, wirken sich nach der Demodulation als **nichtlineare Verzerrungen der Nachricht** aus. Diesen Zusammenhang kann man mit Hilfe des Drehzeigerdiagramms finden, denn es ist möglich, das Drehzeigerdiagramm nicht nur für Extremwerte, sondern auch für alle Zwischenwerte zu konstruieren, siehe Bild 4.17 für verschiedene Zeiten des Diagramms Bild 4.15.

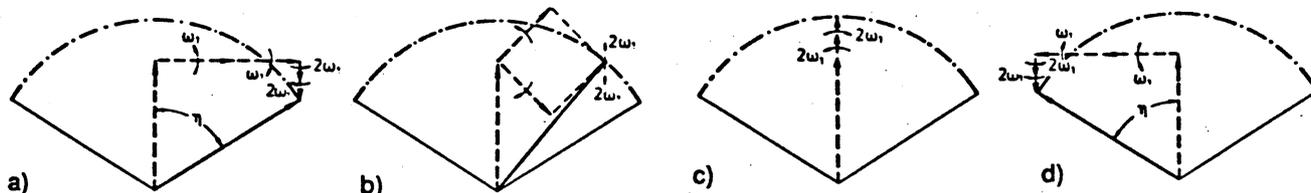


Bild 4.17: Das Drehzeigerdiagramm zu verschiedenen Zeiten

Die Übertragung über ein Filter bewirkt für die Frequenzen einer jeden Linie im Besselspektrum eine entsprechende Änderung der Länge und des Winkels der betreffenden Seitenbandzeiger. Damit setzt sich das Drehzeigerdiagramm am Ausgang des Übertragungssystems anders zusammen als es am Eingang war. Da aber der zeitliche Verlauf des resultierenden **Summenzeigers** (= Pendelzeiger) der Nachricht entspricht, kann man so die Verzerrung des demodulierten FM-Signals berechnen. Bild 4.18 zeigt für eine FM mit  $\beta = 3$  wie sich eine harte Bandbegrenzung der 4. und aller weiteren Linien auswirkt.

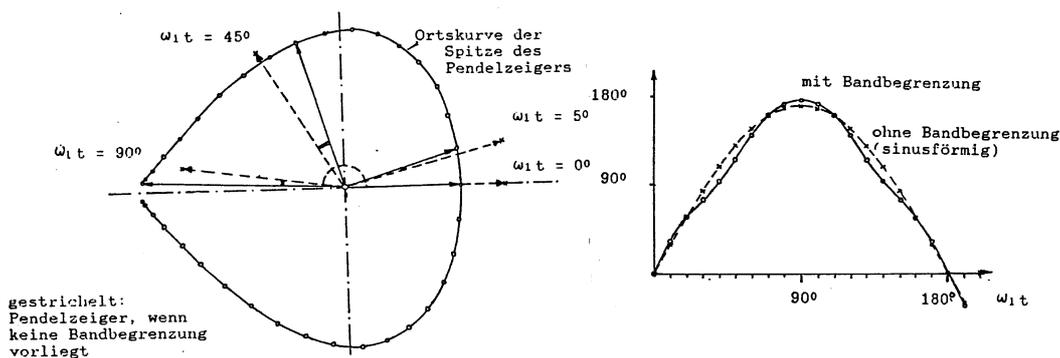


Bild 4.18: Beispiel für Drehzeigerdiagramm und demoduliertes Signal bei harter Bandbegrenzung

In Bild 4.19 sind zwei weitere Beispiele für die Verzerrung des Drehzeigerdiagramms dargestellt.

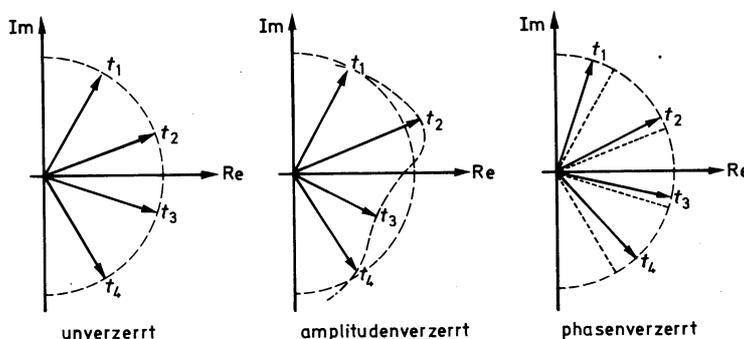


Bild 4.19: Beispiele für die Verzerrung des Drehzeigerdiagramms

Die in diesen Drehzeigerbildern augenfällige **Amplitudenverzerrungen der FM** sind jedoch unerheblich, da diese in der Praxis mit Hilfe eines **Begrenzer-Verstärkers** beseitigt werden.

**Wesentlich sind nur die Phasen-Verzerrungen** bzw. die Laufzeit-Verzerrungen, wobei sich die (Gruppen-) Laufzeit  $t_{gr}$  eines Systems aus der Ableitung der Phase  $\Theta$  nach der Frequenz ergibt:

$$t_{gr}(\omega) = d\Theta(\omega)/d\omega \quad (4.31)$$

Es zeigt sich, daß ein Filter, welches minimale Verzerrungen für ein FM-Signal ergibt, einen **gaußförmigen Amplitudengang** und eine **lineare Phase** bzw. eine **konstante Gruppenlaufzeit** haben sollte.

Für sehr großen Modulationsindex  $\beta \gg 1$  gibt es viele Seitenbandzeiger. Der Endpunkt des Summenzeigers wird dabei *schneckenförmig* erreicht, wie in Bild 4.17 für  $\beta = 7$  erkennbar wird. Die *Gauß-Form* des Filters<sup>4</sup> in Verbindung mit der linearen Phase, Bild 4.20, führt dazu, daß sich die Schnecke *zusammenzieht*, ohne die Lage des Endpunktes zu verändern.

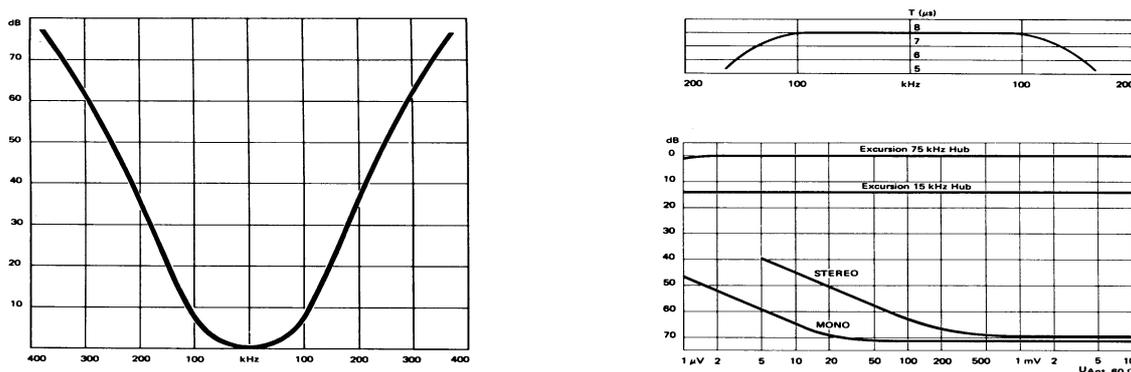


Bild 4.20: Dämpfungsverlauf und Gruppen-Laufzeit  $t_{gr}(f)$  eines FM ZF-Filters für minimale Verzerrungen des demodulierten Nachrichtensignals und Signal-zu-Geräusch-Abstand des demodulierten Signals

## 4.7 Amplitudenbegrenzung der FM-Schwingung

Infolge von zeitlich veränderlichen Ausbreitungsbedingungen (Mehrwege-Empfang und Echos bei Mobilfunk, Rundfunk, Richtfunk usw.) entsteht u.a. eine **Amplitudenschwankung** des winkelmodulierten Signals. Diese Amplitudenschwankungen sind (im Prinzip) ohne Einfluß auf den Informationsgehalt, da die Information in der Phase – und damit in der Lage der Nulldurchgänge des winkelmodulierten Zeitsignals – liegt. Da die Amplitudenschwankungen i.a. zu Störungen des demodulierten Signals führen, werden sie mittels Begrenzerverstärker beseitigt. Daraus ergeben sich zugleich folgende Vorteile im praktischen Betrieb:

- Alle Amplitudenstörungen (Mehrwege-Störungen) werden beseitigt, wenn keine Notches auftreten, die bis unterhalb der Begrenzerschwelle reichen. Für **digitale Modulation** ist dann kein Entzerrer erforderlich. (Anwendung bei Bluetooth)
- Alle (analogen FM-)Sender sind gleich laut, unabhängig von der Empfangsfeldstärke.
- Der Empfänger benötigt keine Verstärkungsregelung im Zwischenfrequenzteil.

Betrachtet man die Nulldurchgänge der FM-Schwingung als Abtastwerte für das Nachrichtensignal, so erhält man einen Abtastfaktor von  $\Omega_C/\omega_N \gg 2$ . Die Abtastbedingung ist somit übererfüllt (Oversampling).<sup>5</sup>

Der Begrenzerverstärker wird als **Kettenschaltung von Differenzverstärkern** realisiert. Wegen der Stromquelle im Differenzverstärker ist hiermit eine **Begrenzung ohne Sättigung** möglich, wodurch eine hohe Grenzfrequenz des Begrenzers erreichbar wird. Der große Amplitudenbereich kommt dadurch zustande, daß bei kleinen Eingangssignalen zunächst nur der letzte Differenzverstärker begrenzt, bei steigenden

<sup>4</sup>Als Dämpfung, Bild 4.20, wird aus der Gauß-Glocke eine Parabel.

<sup>5</sup>Dies zeigt eine weitere Methode für die *Demodulation* eines winkelmodulierten Signals auf, bei welcher keine FM  $\implies$  AM – Wandlung nötig ist.

Eingangsamplituden der Reihe nach alle davorliegenden. Hieraus läßt sich auch noch bequem eine logarithmische Pegelanzeige gewinnen. Die dabei zulässigen Amplitudenwerte für das Eingangssignal liegen im Verhältnis von ca.  $3\mu V \cdots 0,3V$  d.h.  $(1 : 10^5)$ . Wird am Ausgang des Begrenzerverstärkers gefiltert, so liegt wieder eine FM-Schwingung mit konstanter Amplitude vor, Bild 4.21.

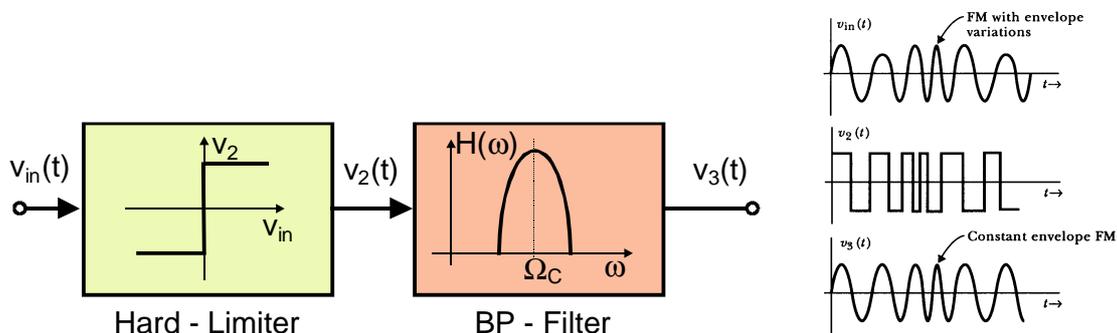


Bild 4.21: Amplitudenbegrenzung einer FM-Schwingung: Blockstruktur und Signale

### 4.7.1 Hubvergrößerung durch Frequenzvervielfachung

Filtert man eine amplitudenbegrenzte FM-Schwingung nicht auf der Frequenz  $\Omega_C$  sondern auf einer ihrer ungeradzahigen Vielfachen  $(2n + 1) \cdot \Omega_C$ , so erhält man außer der entsprechenden Frequenzvervielfachung auch noch eine gleichartige Frequenzhub- und Phasenhub-Vervielfachung, Bild 4.22.

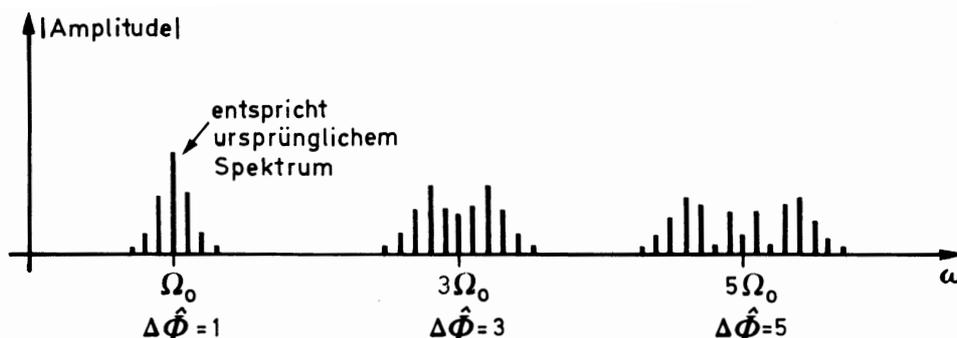


Bild 4.22: Spektrum der amplitudenbegrenzten FM-Schwingung: Der Hub  $\Delta\hat{\Phi}$  ist proportional zur Vielfachen der Trägerfrequenz.

Die Hubvervielfachung um den Faktor  $2n + 1$  sieht man am Einfachsten, wenn man die komplexe Darstellung der FM, Gleichung (4.6), betrachtet. Danach wird für das Eingangssignal  $u_{\text{ein}}(t)$  bzw. für das Ausgangssignal  $u_{\text{aus}}(t)$  des Begrenzerverstärkers:

$$\begin{aligned} u_{\text{ein}}(t) &\sim e^{j\Omega_C t} \cdot e^{j\beta \sin(\omega_N t)} \\ u_{\text{aus}}(t) &\sim e^{j(2n+1)\Omega_C t} \cdot e^{j(2n+1)\beta \sin(\omega_N t)} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{4.32}$$

Diese Art der Hubvervielfachung wird z.B. bei FM-Sendern angewendet, speziell wenn die FM mittels eines Phasenmodulators erzeugt wurde und daher zunächst nur ein sehr kleiner Frequenzhub möglich ist.

Ein entsprechender Effekt kann auch als **Störung in FM-Empfängern** auftreten, wenn die HF-Eingangsstufen **Nichtlinearitäten** aufweisen. Wird dann z.B. eine entsprechende Vielfache der Empfangsfrequenz mit einer Oberschwingung des Oszillators in die ZF umgesetzt, so hat diese FM einen entsprechend vervielfachten Hub. Nach der Demodulation erscheint dadurch ein Sender mit der entsprechenden vielfachen Lautstärke.

## 5 FM-Spektrums-Meßtechnik

Für detailliertere Auskünfte zur Messung an FM-Sendern (und TV-Sendern) sei auf eine Firmenbroschüre [18] hingewiesen, in der genaue Angaben über Sollwerte, Normvorschriften und Meßverfahren gemacht werden.<sup>1</sup>

### 5.1 Messung des FM-Spektrums

Damit das von einem Spektrum-Analyzer angezeigte Bild als **Spektrum** interpretiert werden kann, muß das Analysefilter des Analyzers **eingeschwungen** sein. Daher muß die Ablenkfrequenz  $\omega_{ab}$  umso kleiner sein, je schmaler dieses Filter ist. Die dargestellten **Linien** sind ein Abbild der **Durchlaßkurve dieses Analysefilters**. Bei der Messung von FM-Spektren müssen folgende Fälle unterschieden werden.

**1. Nachrichtenfrequenz < Ablenkfrequenz :** Pro Durchlauf des Analyse-Vorgangs hat sich die Frequenz der FM-Schwingung nur **unwesentlich** geändert. Das bedeutet, daß dadurch auf dem Schirm eine langsam wandernde **Linie** sichtbar wird. Diese läuft im Bereich  $\Omega_C - \Delta\Omega \leq \omega \leq \Omega_C + \Delta\Omega$  hin und her. Dies entspricht dem **Wobbelbetrieb**.

Gemäß der asymptotischen Bestimmung des FM-Spektrums oder mit Hilfe der Besselfunktionen mit  $\beta \rightarrow \infty$  müßte eigentlich so etwas wie eine **gleichmäßige** Spektralbelegung angezeigt werden, Bild 5.1. Der Unterschied kommt dadurch zustande, daß die theoretische Breite des Analysefilters  $B \rightarrow 0$  ist, die praktische jedoch nicht, wodurch ein schnelleres Ein- und Ausschwingen des Filters erfolgt.

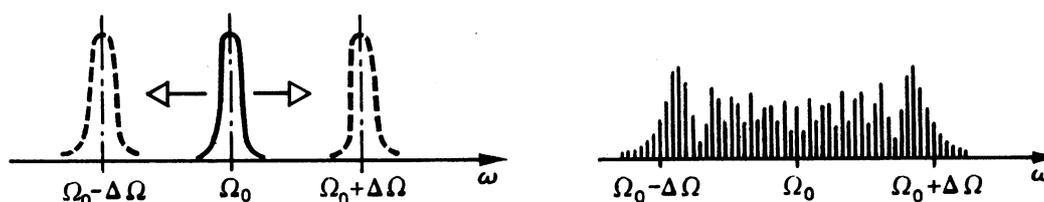


Bild 5.1: Praktisch gemessenes und theoretisches Spektrum einer FM-Schwingung für sehr niederfrequentes Nachrichtensignals

**2. Nachrichtenfrequenz > Ablenkfrequenz :** Das Analysefilter hat in diesem Fall keine Zeit mehr um einzuschwingen, wenn die **Momentanfrequenz** „vorbeikommt“. Es kann deshalb nicht an jeder Stelle innerhalb  $\pm\Delta\Omega$  eine Linie abgebildet werden. Jedoch ist bei einer solchen Messung die frequenzmodulierte Zeitfunktion **periodisch** und damit das Spektrum **linienförmig**. Jede dieser Linien stellt eine **harmonische Teilschwingung** dar, die beliebig lange dauert. Daher spielt hierfür die Einschwingzeit keine Rolle mehr. Der Analyzer zeigt deshalb diese **Linien**, die dem Besselspektrum entsprechen.

**3. Nachrichtenfrequenz  $\sim$  Ablenkfrequenz :** In diesem Übergangsgebiet zeigt der Analyzer ein sehr pauschales Bild des Spektrums, das i.a. nur schwer zu interpretieren ist. Im Grunde ist es ein Mischmasch aus **Kontinuum**, welches mit z.T. **wandernden Linien** durchsetzt ist. Abhilfe schafft eine anders eingestellte Ablenkfrequenz  $\omega_{ab}$ .

### 5.2 Messung der Modulatorkonstanten

Hierzu stellt man Amplitude und Frequenz des Cos-förmigen Nachrichtensignals so ein, daß im Spektrum die **Linie des Trägers** z.B. **zum ersten Mal verschwindet**. Statt dem 1. Träger-Null kann auch jede andere Nullstelle (auch die der Seitenlinien) verwendet werden, wenn man dafür den zugehörigen Wert für  $\beta$  einsetzt. Da nach Bessel für die 1. Nullstelle der Trägerlinie  $J_0$  bei  $\beta = 2,4048 \dots$  erfolgt, kann jetzt die Modulatorkonstante bestimmt werden. Damit gilt<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Dieses Buch mit 224 Seiten (Bestell Nr. N 4-023 D-2) wurde von der örtlichen Vertretung der Firma R&S kostenlos abgegeben.

<sup>2</sup>Meßtechnisch bestimmt man die Konstanten  $K_{FM}$  bzw.  $K_{PM}$  aus der natürlichen Frequenz  $f/KHz$  und dem Effektivwert oder dem Spitze-Spitze-Wert der Nachrichtenspannung.

$k_{FM} = 2,4 \cdot \omega_N / \hat{u}_N$	für <b>FM</b>	(5.1)
$k_{PM} = 2,4 / \hat{u}_N$	für <b>PM</b>	

Hat man keinen Spektrum-Analyzer zur Verfügung, kann auch ein **selektiver Pegelmesser** (Pegelpfänger) verwendet werden, mit dessen Hilfe die Trägerlinie auf ihr Verschwinden kontrolliert wird.

### 5.3 Die Frequenzhub-Messung

Hat man die Modulatorkonstante bestimmt, so gilt für den (Kreis-)Frequenzhub  $\Delta\Omega$

$$\Delta\Omega = k_{FM} \cdot \hat{u}_N \sim \hat{u}_N \quad (5.2)$$

Zur Bestimmung des Frequenzhubs benötigt man also nur noch einen NF-Pegelmesser (oder ein Multimeter) mit entsprechender Skalenbeschriftung. Bei Frequenzhub-Messern ist die Skala direkt für  $\Delta F/KHz$  beschriftet.

Eine in den FM-Sendern realisierte Frequenzhub-Begrenzung zur Vermeidung von Nachbarkanalstörungen ist daher nur eine geeignete Amplitudenbegrenzung des Nachrichtensignals. Diese wird realisiert durch eine amplitudenabhängige Verstärkung bzw. Clipping bei großen Amplituden.

#### 5.3.1 Hub-Begrenzung

Da aufgrund der Pre-Emphase die hohen NF-Frequenzkomponenten amplitudenmäßig angehoben werden, kann es bei Signalen mit vielen hohen Spektralanteilen zur Übersteuerung des FM-Senders kommen. Zur Vermeidung wird in der Praxis nicht nur der NF-Pegel reduziert, sondern auch noch die Eckfrequenz der Preemphase (normalerweise  $T_p = 50\mu sec \rightsquigarrow F_p = 3,14KHz$ ) erhöht (variable Preemphase). Die Veränderung der Preemphase geht dabei allerdings für kleine NF-Pegel auch zu kleineren Werten als der Norm-Eckfrequenz, wodurch der Sender lauter erscheint. Durch die variable Preemphase entsteht insgesamt eine (frequenzabhängige) Dynamik-Kompression.

## Literatur

- [1] Hambley, A.R. : *An Introduction to Communication Systems*, Computer Science Press, 1989.
- [2] Haykin, S. : *An Introduction to Analog & Digital Communications*, Wiley, 1989.
- [3] Lathi, B.P. : *Modern Digital and Analog Communication Systems*, Hault Saunders, 1983.
- [4] Cuccia, C.L.: *Harmonics, Sidebands, and Transients in Communication Engineering*, McGraw Hill, 1952.
- [5] Taub, H.; Schilling, D.L. : *Principles of Communication Systems*, 2. ed., McGraw-Hill, 1989.
- [6] Poularkis, A.D.; Seely, S. : *Signals and Systems*, 2. ed., PWS-Kent, 1991.
- [7] Stremmer, F.G. : *Introduction to Communication Systems*, 3. ed., Addison-Wesley 1990.
- [8] Shanmugan, K.S. : *Digital and Analog Communication Systems*, Wiley 1979.
- [9] Bergmann : *Lehrbuch der Fernmeldetechnik*, 5. A., Schiele & Schön, 1986.
- [10] Woschni : *Informationstechnik*, 2. A., VT 1981.
- [11] Panter, P.F. : *Modulation, Noise, and Spectral Analysis*, McGraw-Hill, 1965.
- [12] Abramowitz; Stegun : *Handbook of Mathematical Functions*, Dover 1965.
- [13] Raschkowitsch, A. : *Phasenwinkelmodulation*, FV 1952.
- [14] Zinke; Brunswig : *Lehrbuch der Hochfrequenztechnik*, 2. A., Springer 1973.
- [15] Lüke, H.D. : *Signalübertragung*, 4.A., Springer 1990.
- [16] Schröder; Rommel : *Elektrische Nachrichtentechnik 1a*, Hüthig & Pflaum 1978.
- [17] Stadler, E. : *Modulationsverfahren*, Vogel 1976.
- [18] Rohde & Schwarz : *Rezepte zur Messung und Überwachung von Rundfunk- und Fernsehsender*, R&S 1990, BN: N 4-023 D-2.
- [19] Wandel & Goltermann : *Verzerrungsmeßtechnik an Richtfunkssystemen*, W&G 1981, BN: 6134.
- [20] Dunlop, J.; Smith, D.G. : *Telecommunications Engineering*, 2. ed., Van Norstrand Reinhold 1989.