Digitale Funk–Systeme

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**

2 Informations–Übertragung analog und digital **2**
2.1 Analoge Übertragung . . . 2
2.1.1 Aufgabe des analogen Empfängers . . . 2
2.1.2 Beispiel AM–Übertragung . . . 3
2.2 Digitale Übertragung . . . 4
2.2.1 Aufgabe des Digitalen Empfängers . . . 5
2.3 Eigenschaften der Signale im Physikalischen Übertragungs-Kanal . . . 5
2.3.1 Analoge Signale . . . 5
2.3.2 Digitale Signale . . . 5
2.4 Blockschaltbilder des Digitalen Übertragungssystems . . . 6

3 Zeit– und Frequenzbereich **9**
3.1 Wichtige Korrespondenzen . . . 9
3.2 Sätze der Fourier–Transformation . . . 9

Abbildungsverzeichnis

1.1 „Der Mobilkommunikative“ zu Beginn der ’90er Jahre & Rundfunkversorgung per Satellit . . . 1
2.1 Analoges Übertragungs–System mit Störung im Kanal 2
2.2 Übertragung einer Cos–förmigen Nachricht mittels AM über einen Kanal, der durch weißes Rauschen gestört ist. 3
2.3 Blockschaltbild eines analogen Übertragunssystems (AM Sender und Empfänger) 4
2.4 Digitales Übertragungs–System mit Störung im Kanal. Über den Kanal werden digitale Symbole übertragen, welche aber analoge Zeitverläufe haben. 4
2.5 Blockschaltbild eines Digitalen Senders 6
2.6 Blockschaltbild eines Digitalen Empfängers; hervorgehoben sind die Blöcke, die zur Gewinnung der Parameter erforderlich sind (innerer Empfänger). 6
2.7 Blockschaltbild einer Digitalen Übertragung; hervorgehoben ist der „innere Empfänger“. 7
2.8 Blockschaltbild eines Digitalen Übertragungssystems 7
2.9 Digitales Übertragungssystem als Schichten–Modell, das verschiedene virtuelle Kanäle zeigt . 8
2.10 Blockschaltbild eines Digitales Übertragungssystems mit I/Q Kanälen 9

Digitale Funk–Systeme

1 Einführung

Der allgemeine und weit verbreitete Wunsch, einerseits mobil zu sein und dabei andererseits elektronisch mit der Umwelt ohne Einschränkungen in Kontakt treten zu können, führte zur Entwicklung und Durchbildung zahlreicher Funksysteme. Seit diese Funksysteme auf digitaler Basis arbeiten, können sie auch in ihrer Mehrzahl so preiswert angeboten werden, daß sie für fast jedermann erschwinglich sind. So wurde zu Anfang der '90er Jahre das mobile Telefonieren modern und erlebte einen ungeahnten Aufschwung. Ganz ähnlich verlief es mit der Rundfunk– und Fernsehversorgung über Satellit. Die Bilder 1.1 geben einen Eindruck von den zugehörigen Szenarien.

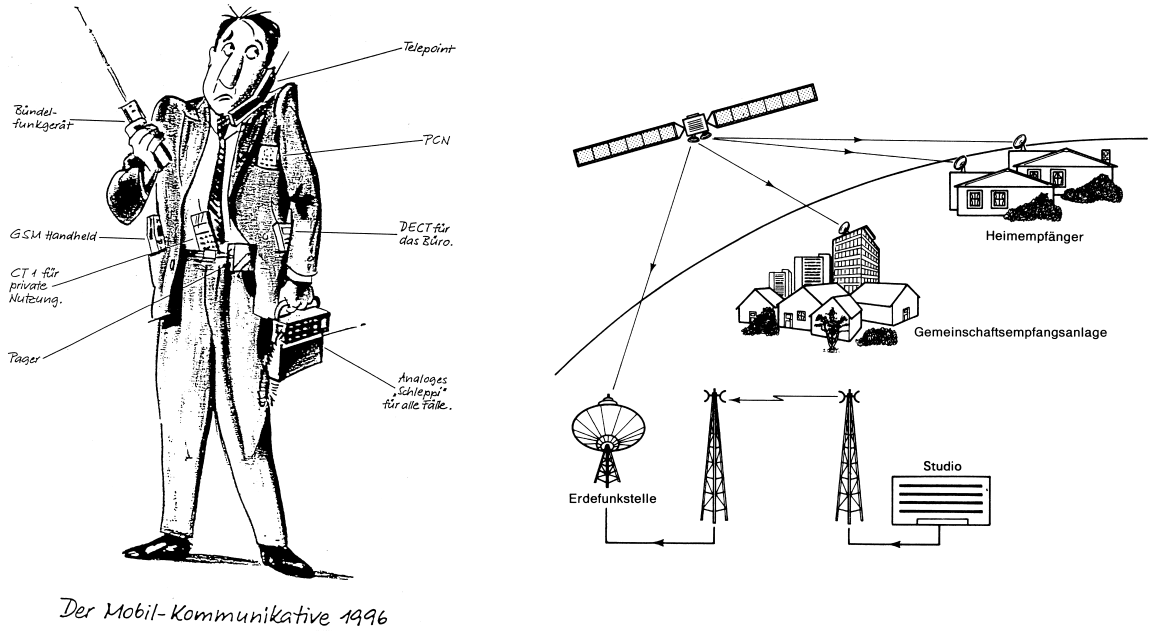


Bild 1.1: „Der Mobilkommunikative" zu Beginn der '90er Jahre & Rundfunkversorgung per Satellit

Nicht alle vorgestellten Systeme konnten sich am Markt durchsetzen, wie aus den vielfältigen Gerätchen des „Mobilkommunikativen", einer (damaligen) Voraussage auf das Jahr 1996, zu erkennen ist.

Der Funk–Kanal beeinflußt ganz wesentlich die Parameter und Definition des Digitalen Systems.

Der Funk–Kanal ist aus mehreren Gründen ein sehr ungünstiges Übertragungsmedium, verglichen mit dem Kabel oder der Glasfaser.

- Mehrfache Nutzung des gleichen Frequenzbereiches führt zu gegenseitigen Beeinträchtigungen und Störungen.
- Der Übertragungsweg hat keinerlei „Abschirmung" gegenüber Störungen elektromagnetischer Art.
- Der Übertragungsweg besteht i.a. aus einer Anzahl paralleler Wege mit unterschiedlicher Laufzeit (**Echo–Wege**). Der daraus resultierende Effekt wird **Delay–Spread** bezeichnet.
- Die Mobilität von Sender und/oder Empfänger (und/oder Reflektor) führt zu **Doppler–Verschiebungen** des Empfangs–Signals. Das Signal erleidet einen **Doppler–Spread**.

Bei einem Digitalen Übertragungs–System besteht (mit entspechendem Aufwand) die Möglichkeit, die System–Parameter so zu wählen, daß sich die Nachteile des Funk–Kanals praktisch nicht bemerkbar machen. Besonders deutlich wird dies im Unterschied zu einer analogen Übertragung.

2 Informations–Übertragung analog und digital

Die **analoge** Übertragung berücksichtigt insbesondere die Signalformen im Zeit– und Frequenzbereich. Hingegen werden die Störungen auf dem Übertragungsweg (Kanal) nur in zweiter Linie betrachtet. Es gibt dabei nur wenige Möglichkeiten, dagegen etwas zu unternehmen, wie z.B. die Vergrößerung der Sendeleistung, oder der Einsatz exponentieller Modulationen (FM, PM).

Prinzipiell ganz anders verhält es sich bei **digitaler** Übertragung. Hierbei werden zur Übertragung **Symbole** verwendet, die optimal an die Störungen durch den Kanal angepaßt werden können. **Die ausgesendeten Zeitverläufe der Symbole haben keinerlei Ähnlichkeiten mit den Zeitverläufen der zu übertragenden Nachricht.**

Die Vorteile einer Digitalen Übertragung werden dann besonders deutlich, wenn diese mit einer Analogen Übertragung verglichen wird. Hierfür wird als Beispiel eine Übertragung von Audio–Signalen betrachtet, wie sie z.B. als Musikübertragung im Rundfunk vorkommt.

2.1 Analoge Übertragung

Bild 2.1 zeigt das Blockschaltbild eines Analogen Übertragungs–Systems mit einer Störung auf dem Übertragungskanal. Q_N ist die Nachrichten–Quelle, welche das Signal $s(t)$ abgibt. S_N ist die Nachrichten–Senke, die das Signal $g(t)$ empfängt, das aus $s(t)$ und der Störung besteht. Bei einer analogen Übertragung geht diese Störung auf direktem Wege (voll oder teilweise, abhängig von der Modulationsart) in das empfangene Signal ein.

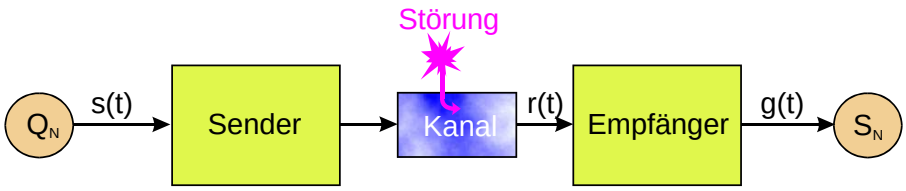


Bild 2.1: Analoges Übertragungs–System mit Störung im Kanal

Das Signal $s(t)$ wird an den Kanal angepaßt bezüglich

- Frequenzbereich (durch Modulation),
- Bandbreite (durch Filterung).
- Störungen des Kanals (durch Wahl der Sendeleistung und der Modulations–Art).

2.1.1 Aufgabe des analogen Empfängers

- **Aufgabe des analogen Empfängers** ist es, das **gesendete Nachrichten–Signal** $s(t)$ empfangsseitig möglichst **originalgetreu zu rekonstruieren**.

Gewünscht ist also $g(t) = s(t)$, was jedoch grundsätzlich nicht exakt möglich ist, da die analoge (modulierte) Zeitfunktion auf dem Kanal über das verwendete (analoge) Modulationsverfahren eng mit $s(t)$ verwandt ist. Erleidet das empfangene Signal eine Störung, so wirkt sich diese auch auf das demodulierte Signal $g(t)$ aus.

- Bei Modulationen mit **geringer Bandbreite** (AM, DSB, QDSB, SSB) wirkt sich die **Störung stark** aus.
- Modulationen mit **vergrößerter Bandbreite** (FM, PM) werden um so weniger gestört, je größer die Bandbreite des modulierten Signals (entspricht der Kanal–Bandbreite B_{RF}) gewählt wird.
- Dieser Zusammenhang wird durch den „Nachrichten–Quader“ ausgedrückt, für welchen gilt:

$$\boxed{T_{\ddot{u}} \cdot B_{\mathrm{RF}} \cdot D = \mathrm{const}} \tag{2.1}$$

Hierbei ist $T_{\ddot{u}}$ die Zeitdauer der Übertragung (hier: Echt–Zeit), B_{RF} die Bandbreite der Übertragung und D die Dynamik des Kanals.

Die Dynamik D des Kanals ist gegeben durch

$$\boxed{D = \log_2\left(\frac{P_S + P_n}{P_n}\right) = \lg\left\{1 + \left(\frac{P_S}{P_n}\right)\right\} / \lg(2) \approx \frac{10 \cdot \lg(\mathrm{SNR})}{10 \cdot \lg 2} \approx \frac{1}{3}\,\mathrm{SNR/dB} \qquad \textbf{Kanal–Dynamik}} \tag{2.2}$$

wobei P_S die Signal–Energie und P_n die Energie der Störung (*noise*) und $\left(\frac{P_S}{P_n}\right) = SNR$ das **Signal–zu–Geräusch–Verhältnis** ist.

- Erhöht man die Bandbreite B_{RF} der Übertragung, so wird (für gleiche Störwirkung bezogen auf das demodulierte Signal) eine geringere Dynamik D_{Kanal} im Kanal benötigt. Man kann dann bei gegebener Signal–Energie P_S eine größere Stör–Energie P_n zulassen oder bei gegebenem P_n die Signal–Energie P_S entsprechend verringern.

2.1.2 Beispiel AM–Übertragung

Zur Veranschaulichung dieses Sachverhaltes wird ein Beispiel einer amplitudenmodulierten Schwingung gewählt, Bild 2.2.

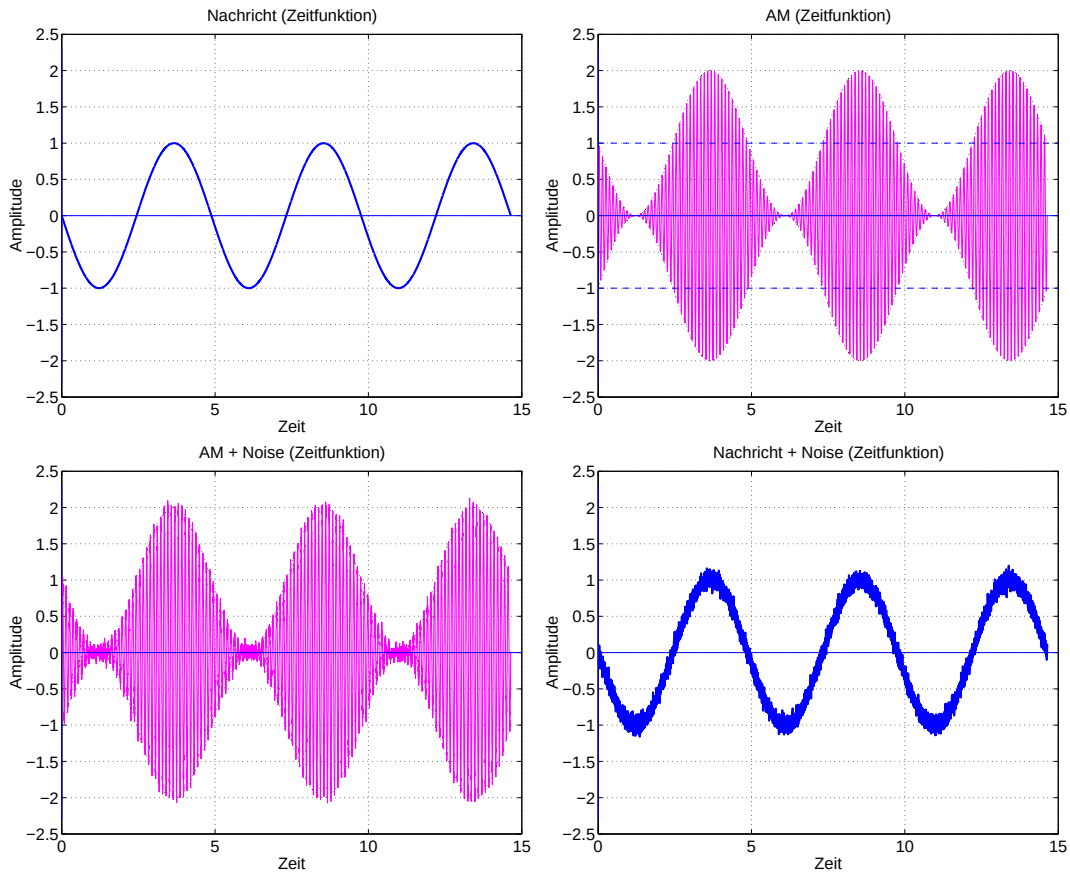


Bild 2.2: Übertragung einer Cos–förmigen Nachricht mittels AM über einen Kanal, der durch weißes Rauschen gestört ist.

Bei der AM gehen die Sörungen des Kanals voll in das demodulierte Signal ein. Andererseits kommt diese (historisch gesehen: alte) Modulationsart mit einen minimalen technischen Aufwand aus. Dies betrifft insbesondere den Empfänger. Die Philosophie zu Beginn der Rundfunkübertragung bestand darin, daß im

Empfänger nur ein minimaler Aufwand nötig sein sollte. Unter den Gesichtspunkten des Marketings war dies bei der Einführung eines neuen Systems (anno 1923) sicherlich kein schlechter Ansatz. Demzufolge ist das Blockschaltbild des AM–Senders und des AM–Empfängers recht einfach, Bild 2.3.

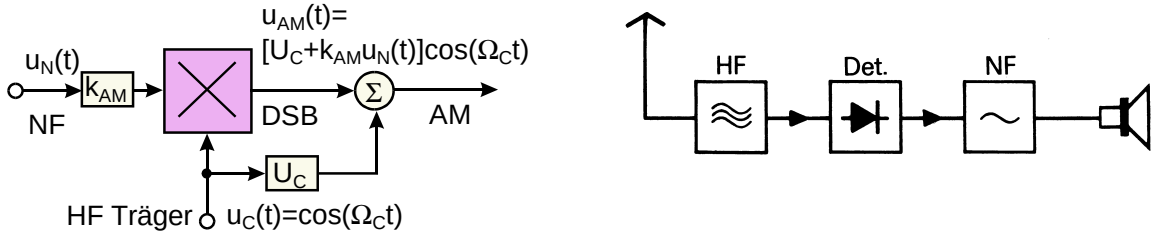


Bild 2.3: Blockschaltbild eines analogen Übertragunssystems (AM Sender und Empfänger)

2.2 Digitale Übertragung

Die zu übertragenden Nachrichtensignale werden in **digitale Symbole** umgewandelt. Damit sind die Zeitverläufe auf dem Übertragungskanal total verschieden von den Nachrichtensignalen am Ein– und Ausgang des Digitalen Übertragungs–Systems. Es besteht keinerlei Ähnlichkeit zwischen beiden Signalformen (Nachricht bzw. Symbole). Am Ausgang des Digitalen Senders erfolgt eine D/A Wandlung und am Eingang des Digitalen Empfängers eine A/D Wandlung der Symbole, Bild 2.4.

- Die Digitalen Symbole haben im Kanal analoge Zeitverläufe (in Form einer modulierten Schwingung).

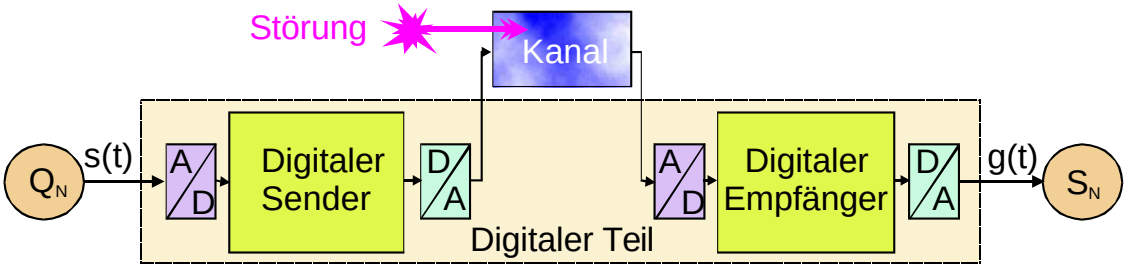


Bild 2.4: Digitales Übertragungs–System mit Störung im Kanal. Über den Kanal werden digitale Symbole übertragen, welche aber analoge Zeitverläufe haben.

Die Digitale Symbole werden so ausgewählt, daß sie **optimal an die Eigenschaften des Kanals angepaßt** sind hinsichtlich

- Frequenzbereich (als Digitale Modulation)
- Bandbreite (durch Symbol–Verrundung, daher analoge Zeitverläufe)
- Störungen (durch die Art der Digitalen Modulation und der Fehlerschutz–Codierung)
  Die Störungen (im Kanal) sind z.B.:
  - **Rauschen** (thermisch)
  - **Echos** (Mehrwege–Ausbreitung)
  - **Doppler–Verschiebungen** (bewegte Sender, Empfänger, Reflektoren)
  - **Interferenzen** (fremde Sender)
  - **Man–made–Noise** (elektromagnetische Störungen durch Funkenbildung)
  - **Statics** (elektrische Entladungen in der Atmosphäre)
  - **Jammer** (absichtliche Störsender)

2.2.1 Aufgabe des Digitalen Empfängers

Die **Aufgabe des Digitalen Empfängers** ist es, die **gesendeten Symbole zu erkennen**. Im Unterschied zum analogen Empfänger müssen die digitalen Symbole im Empfänger **nicht rekonstruiert** werden. Das ist ein Vorteil, denn ein digitales Symbol kann auch noch dann richtig erkannt werden, wenn es durch Störungen auf dem Übertragungsweg seine Form (leicht) verändert hat. Werden die empfangenen Symbole **richtig erkannt**, weist ihnen der digitale Empfänger die dafür **verabredeten Bitkombinationen** zu und es entsteht (trotz gestörter Symbolform) **keine empfangsseitige Störung** im wiedergegebenen Signal.

- **Die gesendeten und im Kanal übertragenen Symbole sind analoge Zeitfunktionen.** Dies ist notwendig, weil sie als **bandbegrenztes** moduliertes Signal übertragen werden müssen.

Aufgrund der Notwendigkeit der optimalen Anpassung der Symbole an die verschiedenartigsten Störungen im Kanal hat sich eine „bunte Palette“ von Digitalen Modulationsverfahren, Fehlerschutz–Codierungen und Kombinationen aus beiden herausgebildet.

Als typische Vor– und Nachteile einer Digitalen Übertragung lassen sich angeben:

- Wiedererkennen von (bekannten) Symbolen ist (bis zu einer systembedingten Schwelle) fehlerfrei möglich. Im Unterschied dazu ist eine exakte Rekonstruktion eines (gestörten analogen) Empfangssignales praktisch nicht möglich.
- Werden die Störungen zu groß, werden zu viele Symbole nicht richtig erkannt, die Fehlerrate steigt und die Übertragung bricht zusammen.
- Nicht kompatibel mit analogen Übertragungsverfahren (z.B. im Rundfunk sind neue Empfänger erforderlich.)
- Höhere technische Komplexität (Fällt nicht ins Gewicht, da kundenspezifische digitale Schaltkreise bei großen Stückzahlen preiswert sind und die Funktion softwaremäßig realisiert wird.)
- Bandbreitenbedarf (bei Digitalübertragung aufgrund von Quellen–Codierung geringer als bei Analogübertragung, z.B. 4 DVB–T Fernsehkanäle statt 1 analogem Kanal)
- Quantisierungsgeräusch (Kann immer geringer gemacht werden als es im analogen Fall die Kanalstörungen sind.)

2.3 Eigenschaften der Signale im Physikalischen Übertragungs-Kanal

2.3.1 Analoge Signale

Bei einer analogen Übertragung sind im Prinzip **alle Zeitverläufe** zulässig, die spektral innerhalb der (vom jeweiligen analogen System) zugelassenen Grenzfrequenzen liegen. Es gibt in diesem Sinne keine unzulässigen Zeitverläufe. Daher ist ein gesendeter Zeitverlauf, dem im Kanal eine Störung (Rauschen, Echos, usw.) überlagert wurde, ebenfalls ein „zulässiger“ Zeitverlauf. Der Empfänger hat keine Möglichkeit, diesen als „unzulässig“ zu erkennen und die Störung zu beseitigen. Mit diesem Problem kämpft der analoge Rundfunk seit seinen Kindertagen. Ein Beispiel hierzu ist in Bild 2.2 gezeigt.

2.3.2 Digitale Signale

Bie einer Digitalen Übertragung werden „nur“ **exakt zwischen Sender und Empfänger verabredete (analoge) Zeitverläufe** übertragen. Diese setzen sich aus **genau definierten Symbolen** zusammen, und nur diese sind „zulässige“ Zeitverläufe. Die Wahl der Symbole geschieht dabei jeweils so, daß die Übertragung optimiert wird, d.h. maximale Übertragungs–Rate bei minimaler Fehler–Rate.

Der Empfänger kennt alle „zulässigen“ Symbolformen. Er vergleicht die empfangene Zeitfunktion mit allen ihm bekannten Symbolformen. Dieser Vergleich geschieht mittels **Korrelation** (im Zeitbereich) oder mittels **Matched Filterung** (im Frequenzbereich). Aufgrund der überlagerten Störungen sind die empfangenen Symbole nie 100%ig gleich zu den im Empfänger gespeicherten Symbolen. Vielmehr ergibt sich i.a. eine gute Übereinstimmung mit einer Symbolform und eine schlechte mit allen anderen. Es muß also eine **Entscheidungs–Schwelle** definiert sein, oberhalb dieser auf eine „gute Übereinstimmung“ entschieden wird.

Ist die **Energie** in den empfangenen Symbolen größer als die Energie der Störungen, so wird diese Vorgehensweise mit ganz wenigen Ausnahmen zu einer richtigen Entscheidung führen. Dem im Empfänger erkannten Symbol wird die verabredete Bit–Folge zugeordnet und man erhält so den empfangsseitigen Bitstrom. Dieser ist dann fehlerfrei und von den Störungen im Kanal ist dann nichts mehr zu merken.

Störungen sind Zufallsgrößen. Diese können in einzelnen Fällen sehr wohl so groß werden, daß der Empfänger auf eine falsche Symbolform entscheidet. Dann entsteht ein Symbolfehler. Je nach zugeordneter Bit–Folge können daraus ein oder mehrere Bit–Fehler folgen.

Bit–Fehler können durch **Fehlerschutz–Codierung** (teilweise oder ganz) korrigiert werden. Je nach der Struktur der Bit–Fehler werden unterschiedliche Codierverfahren angewendet.

2.4 Blockschaltbilder des Digitalen Übertragungssystems

Die Philosophie einer Digitalen Übertragung ist es, eine minimale Bit–Fehler–Rate (BER bit error rate) zu erreichen, nicht jedoch eine möglichst einfache Hardware zu erhalten, wie es bei einer analogen Übertragung der Fall war. Insbesondere ist der Digitale Empfänger (Bild 2.6) immer viel aufwendiger als der Digitale Sender (Bild 2.5).

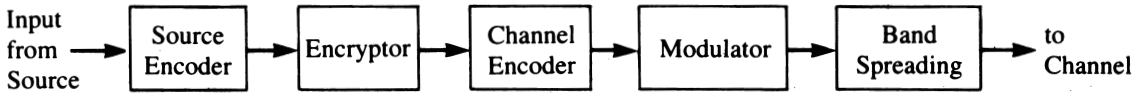


Bild 2.5: Blockschaltbild eines Digitalen Senders

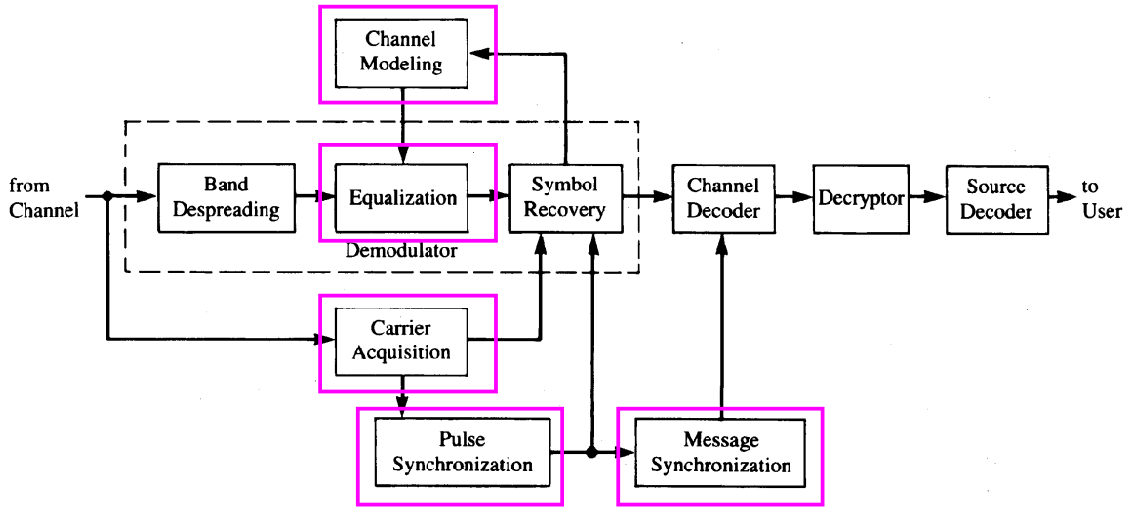


Bild 2.6: Blockschaltbild eines Digitalen Empfängers; hervorgehoben sind die Blöcke, die zur Gewinnung der Parameter erforderlich sind (innerer Empfänger).

- Der größere Aufwand im Digitalen Empfänger kommt dadurch zustande, daß die zur Demodulation und Decodierung notwendigen Signale und Kennwerte (z.B. **Trägerfrequenz, Trägerphase, Symboltakt, Datentakt, Kanal–Eigenschaften**) aus dem gestörten analogen Empfangs–Signal gewonnen werden müssen.
- Ohne exakte Kenntnis dieser Parameter–Werte ist keine Demodulation und Decodierung eines Digitalen Signals möglich.
- Je genauer diese Parameterwerte bestimmt werden können, um so kleiner wird die Bit–Fehler–Rate (BER) des zurückgewonnenen Datenstroms.

Die für die Gewinnung der Parameter–Werte erforderlichen Blöcke werden auch als **„innerer Empfänger“** (*inner receiver*) bezeichnet, Bild 2.7.

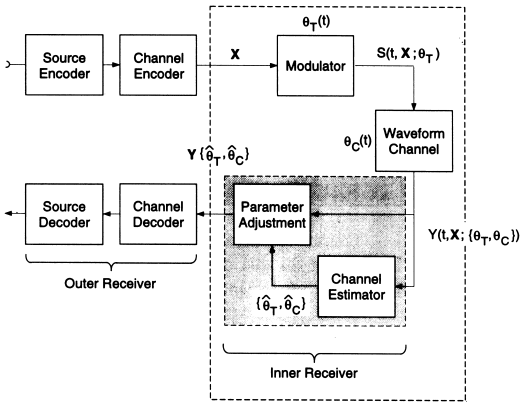


Bild 2.7: Blockschaltbild einer Digitalen Übertragung; hervorgehoben ist der „innere Empfänger“.

Obwohl die Funktion dieses inneren Empfängers von elementarer Wichtigkeit für einen Digitalen Empfänger ist, werden in vielen Literaturstellen diese Blöcke meist nicht oder nur sehr oberflächlich behandelt. Häufig wird vorausgesetzt, daß der Digitale Empfänger die Parameter–Werte (von irgend woher) kennt. Es muß dann nur noch der **„äußere Empfänger“** (outer receiver) betrachtet werden, also i.w. die Demodulation und die Decodierung.

Bei der Entwicklung eines Digitalen Übertragungs–Systems wird man zunächst i.a. die benötigten Informationen über zusätzliche Leitungen dem Empfänger zur Verfügung stellen. Man erhät damit allerdings idealisierte Ergebnisse z.B. für BER. Auch einige Systemsimulatoren arbeiten in dieser Weise.

Das nächste Blockschaltbild, Bild 2.8, stellt ein vollständigeres Digitales Übertragungssystem dar.

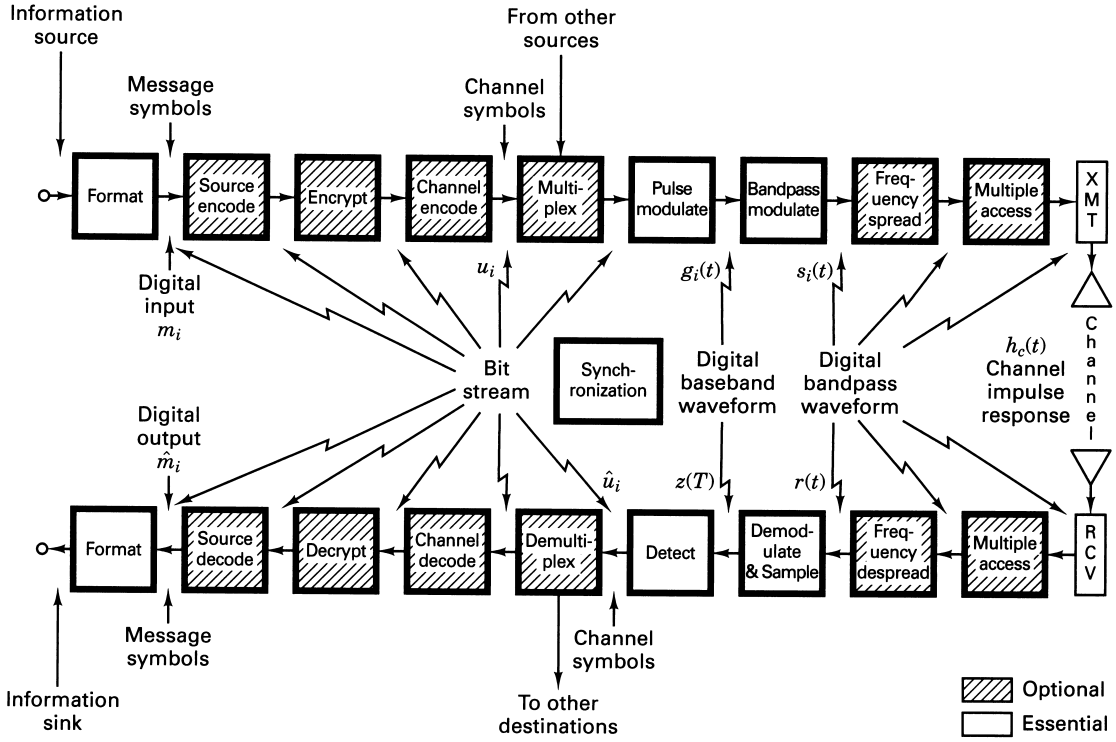


Bild 2.8: Blockschaltbild eines Digitalen Übertragungssystems

Die Synchronisation, also ein wichtiger Teil des inneren Empfängers, ist dabei als „freischwebender“ Block dargestellt. Sehr gut dargestellt sind in diesem Bild die Blöcke des „äußeren Empfängers“ und des Senders. Man erkennt deutlich, daß die Signalabbereitung im Empfänger in der umgekehrten Reihenfolge wie die Signalaufbereitung im Sender erfolgt.

Bei Digitalen Übertragungssystemen gibt es Blöcke, die unverzichtbar oder essentiell sind. Diese sind in Bild 2.8 als nicht schraffiert dargestellt. Andere Blöcke werden in Abhängigkeit von der Anwendung und den Kanaleigenschaften benötigt und wahlweise eingefügt. Diese sind schraffiert gezeichnet und als optional bezeichnet.

Die Tatsache, daß die Funktionsblöcke im Digitalen Sender und im Digitalen Empfänger in umgekehrter Reihenfolge angeordnet sind, wird in Bild 2.9 ebenfalls dargestellt. Hier sieht man zusätzlich, daß die entsprechenden Abschnitte zwischen den zugehörigen Ein– und Ausgängen als (virtuelle) Kanäle bezeichnet werden.

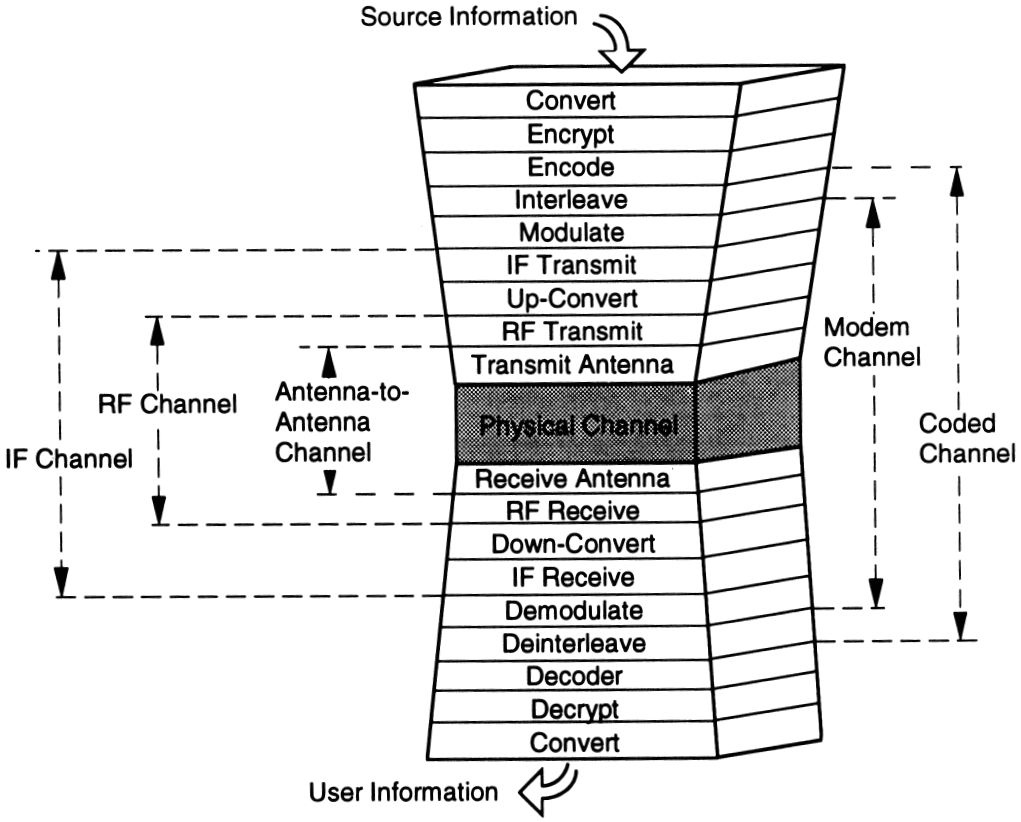


Bild 2.9: Digitales Übertragungssystem als Schichten–Modell, das verschiedene virtuelle Kanäle zeigt

Die virtuellen Kanäle „Physikalischer Kanal“, „Antenne – Antenne“, „Hochfrequenz–Kanal“ (RF: *radio frequency*) und „Zwischenfrequenz–Kanal“ (IF: i*ntermediate frequency*) sind **analoge** Kanäle. Im Blockschaltbild 2.8 sind diese Teile nur pauschal als XMT (*transmitter, xmitter*), Channel (Funk–Kanal) und RCV (*receiver*) bezeichnet.

Alle virtuellen Kanäle darüber im Sender bzw. darunter im Empfänger sind **digitale** Kanäle. Diese sieht man ausführlicher im Bild 2.8.

Vergleicht man die Darstellungen der verschiedenen Blockschaltbilder, so stellt man weiterhin fest, daß „Channel“ in Bildern 2.5 und 2.6 gleich zu setzen ist mit „IF Channel“ in Bild 2.9.

- Digitale Übertragungssysteme sind i.a. sehr komplex. Daher werden oft auch unterschiedliche Blöcke dargestellt, je nachdem was hervorgehoben und betrachtet werden soll.

Bei der Entwicklung eines Digitalen Übertragungs–Systems — sei es softwaremäßig für den digitalen Teil oder hardwaremäßig für den analogen Teil — werden immer die zusammengehörigen Teile im

Empfänger und im Sender parallel entwickelt und getestet. Voraussetzung dafür ist dann auch, daß die **Schnittstellen** und die zugehörigen **Protokolle** zwischen allen virtuellen Teilkanälen eindeutig festgelegt wurden.

Bei Digitalen Funksystemen ist der Funk–Kanal meist in seiner **Bandbreite begrenzt**. Daher ist man bestrebt, diesen mehrfach auszunutzen. Dies geschieht dadurch, daß eine **Quadratur–Modulation** angewendet wird. Die Quadratur–Modulation verwendet 2 Modulatoren, die jeweils von einem Cos– bzw. Sin–Träger versorgt werden. Der Datenstrom (bzw. Symbol–Strom) wird hierfür in 2 gleiche Teile aufgespalten, Bild 2.10. Die Teile werden I (inphase) und Q (quadrature) benannt.

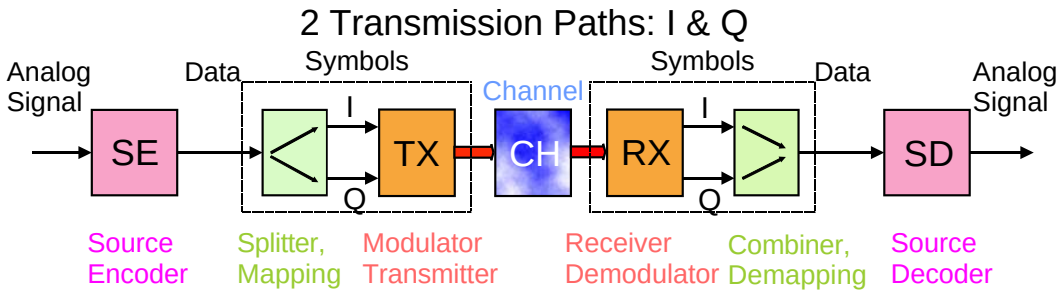


Bild 2.10: Blockschaltbild eines Digitales Übertragungssystems mit I/Q Kanälen

3 Zeit– und Frequenzbereich

Die Beschreibung und das Verständnis von Digitalen Funksystemen erfordert die gründliche Kenntnis der Zusammenhänge zwischen Zeit–Funktionen und deren Beschreibung im Frequenz–Bereich. Es wird daher an vielen Stellen auf Zusammenhänge und Ergebnisse aus der Vorlesung „Signale und Systeme“ zurückgegriffen, ohne daß diese hier nochmals im einzelnen hergeleitet werden können.

3.1 Wichtige Korrespondenzen

Folgende Korrespondenzen werden als bekannt vorausgesetzt, Seiten 10, 11.

3.2 Sätze der Fourier–Transformation

Ein Überblick über die Sätze der Fourier–Transformation wird in der Tabelle auf Seite 12 gegeben.

Literatur

[1] Blahut, R. E.: *Digital Transmission of Information*, Addison–Wesley, 1990

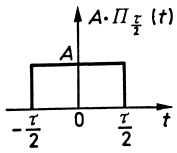
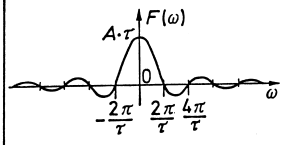
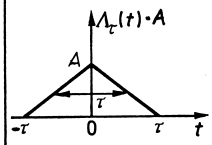
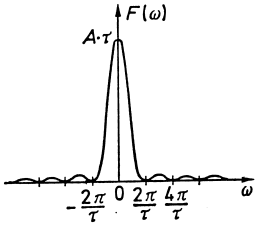
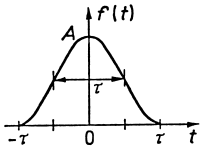
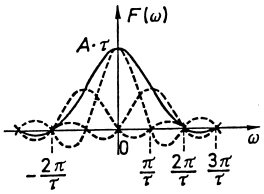
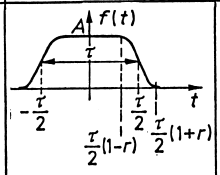
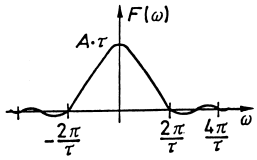
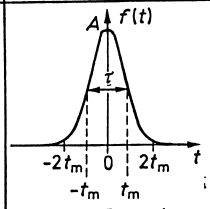
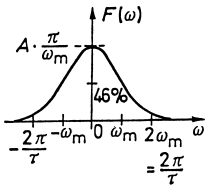
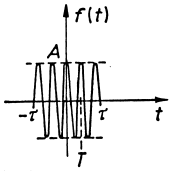
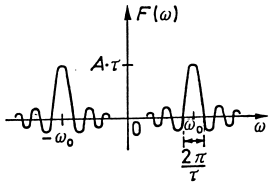
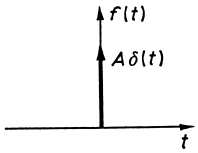
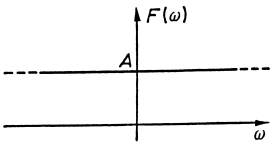
[2] Sklar, B.: *Digital Communications, Fundamentals and Applications*, Prentice Hall, 2nd ed. 2001

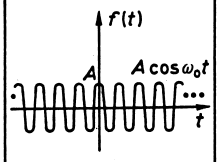
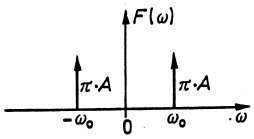
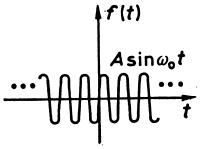
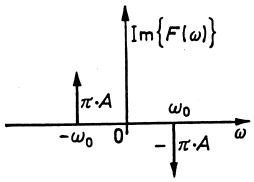
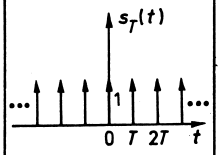
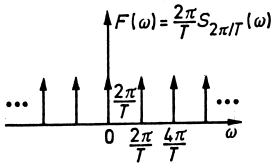
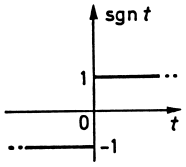
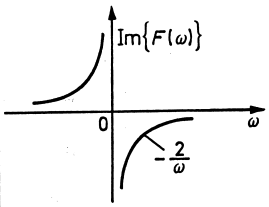
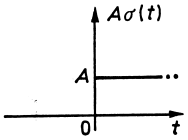
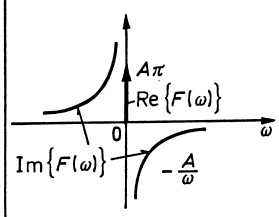
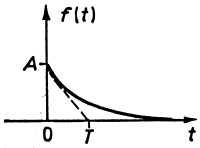
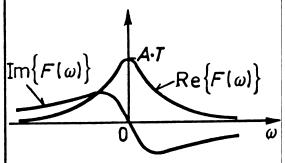
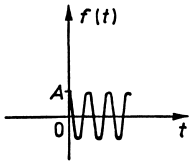
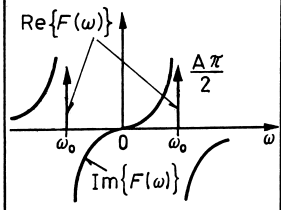
[3] Simon, M.K., Hinedi, S.M., Lindsey, W. C.: *Digital Communication Techniques, Signal Design and Detection*, Prentice Hall, 1995

[4] Meyr, H., Moeneclaey, M., Fechtel, St. A.: *Digital Communication Receivers, Synchronization, Channel Estimation, and Signal Processing*, Wiley, 1998

[5] Roddy, D.: *Satelliten–Kommunikation*, Hanser & Prentice–Hall, 1991

[6] Rudolph, D.: *Signale und Systeme*, Vorlesung an der TFH Berlin

Zeitfunktion		$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$		Spektraldichte
Nr.	Bild der Zeitfunktion	Formel für $f(t)$	Formel für $F(\omega)$	Bild der Spektraldichte
1	 Rechteck-Impuls	$f(t) = A \cdot \Pi_{\frac{\tau}{2}}(t) = \begin{cases} A, & \lvert t\rvert < \tau/2 \\ 0, & \lvert t\rvert > \tau/2 \end{cases}$	$F(\omega) = A \cdot \tau \, \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$	
2	 Dreieck-Impuls	$f(t) = A \cdot \Lambda_\tau(t) = \begin{cases} A\left(\Lambda - \frac{\lvert t\rvert}{\tau}\right), & \lvert t\rvert < \tau \\ 0, & \lvert t\rvert > \tau \end{cases}$	$F(\omega) = A \cdot \tau \left(\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\right)^2$	
3	 $\cos^2$-Impuls	$f(t) = \begin{cases} A \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2\tau} t\right), & \lvert t\rvert < \tau \\ 0, & \lvert t\rvert > \tau \end{cases}$	$F(\omega) = A\tau \left\{ \frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau} + \frac{1}{2} \frac{\sin(\omega+\omega_0)\tau}{(\omega+\omega_0)\tau} + \frac{1}{2} \frac{\sin(\omega-\omega_0)\tau}{(\omega-\omega_0)\tau} \right\}; \; \omega_0 = \frac{\pi}{\tau}$	
4	 Verrundeter Impuls, Roll-Off-Faktor r	$f(t) = \begin{cases} A, & \lvert t\rvert < \frac{\tau}{2}(1-r) \\ 0, & \lvert t\rvert > \frac{\tau}{2}(1+r) \end{cases}$ $f(t) = \frac{A}{2} \cdot \left\{ 1 - \sin\left[\frac{\pi}{r \cdot \tau}\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] \right\}$, $\frac{\tau}{2}(1-r) < \lvert t\rvert < \frac{\tau}{2}(1+r)$ $r = 0$ Rechteck-Impuls $r = 1$ $\cos^2$-Impuls	$F(\omega) = A \frac{\pi^2}{4} \cdot \tau \cdot \frac{\cos(\omega \cdot r \cdot \tau/2)}{(\pi/2)^2 - (\omega \cdot r \cdot \tau/2)^2} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot \tau/2)}{\omega \cdot \tau/2}$	
5	 Gauß-Impuls	$f(t) = A \cdot e^{-\pi\left(\frac{t}{2t_m}\right)^2}$, $t_m = \frac{\pi}{2\omega_m}$	$F(\omega) = A \frac{\pi}{\omega_m} \cdot e^{-\pi\left(\frac{\omega}{2\omega_m}\right)^2}$, $\omega_m = \frac{\pi}{2t_m} = \frac{\pi}{\tau}$	
6	 Modulierter Rechteck-Impuls	$f(t) = \begin{cases} A \cdot \cos(\omega_0 t), & \lvert t\rvert < \tau \\ 0, & \lvert t\rvert > \tau \end{cases}$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	$F(\omega) = A\tau \left\{ \frac{\sin(\omega+\omega_0)\tau}{(\omega+\omega_0)\tau} + \frac{\sin(\omega-\omega_0)\tau}{(\omega-\omega_0)\tau} \right\}$	
7	 Dirac-Impuls	$f(t) = A \cdot \delta(t) = A \cdot \frac{d\sigma(t)}{dt}$	$F(\omega) = F_\delta(\omega) = A$	

Zeitfunktion		$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$		Spektraldichte
Nr.	Bild der Zeitfunktion	Formel für $f(t)$	Formel für $F(\omega)$	Bild der Spektraldichte
8	 cos-Schwingung	$f(t) = A \cdot \cos \omega_0 t$	$F(\omega) = A\pi \left\{ \delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0) \right\}$	
9	 sin-Schwingung	$f(t) = A \cdot \sin \omega_0 t$	$F(\omega) = jA \cdot \pi \left\{ \delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0) \right\}$	
10	 δ-Kamm	$f(t) = s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$	$F(\omega) = \omega_0 S_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	
11	 Signum-Funktion	$f(t) = \operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$	$F(\omega) = 2/j\omega = -j\,2/\omega$	
12	 Sprungfunktion	$f(t) = A\sigma(t) = A \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \begin{cases} A, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$F(\omega) = A \left\{ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right\}$	
13	 Exponential-funktion (Entladekurve)	$f(t) = \begin{cases} A \cdot e^{-t/T}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$F(\omega) = \frac{A \cdot T}{1 + j\omega T} = A \cdot T \cdot \frac{1 - j\omega T}{1 + (\omega T)^2}$	
14	 Eingeschaltete cos-Schwingung	$f(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \sigma(t)$	$F(\omega) = A \frac{\pi}{2} \left\{ \delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0) \right\} + \frac{j\omega A}{\omega_0^2 - \omega^2}$	

Satz	Zeitbereich		Frequenzbereich
	$f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega)$
Zentralordinate	$f(0)$	$=$	$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega$
	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$	$=$	$F(0)$
Linearität	$a \cdot f(t) + b \cdot g(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$a \cdot F(\omega) + b \cdot G(\omega)$
Symmetrie	$f_e(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F_e(\omega)$
	$f_o(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$j \cdot F_o(\omega)$
Komplexe Zeitfunktionen	$f(t) = f_R(t) + jf_I(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega) = F_R(\omega) + jF_I(\omega)$
	$f^*(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F^*(-\omega)$
Vertauschung	$g(t) = F(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$G(\omega) = 2\pi \cdot f(-\omega)$
Ähnlichkeit	$f(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F(\omega/a)$
Zeitverschiebung	$f(t - t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-j\omega t_0} \cdot F(\omega)$
Frequenzverschiebung	$e^{+j\Omega_C t} \cdot f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega - \Omega_C)$
Analytisches Signal $f_A(t)$	$f(t)\cos(\Omega_C t) + jf(t)\sin(\Omega_C t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega - \Omega_C)$
Modulation	$f(t) \cdot \cos(\Omega_C t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\dfrac{F(\omega - \Omega_C) + F(\omega + \Omega_C)}{2}$
Differentiation	$\frac{d}{dt}f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$j\omega \cdot F(\omega)$
	$t \cdot f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$j\frac{d}{d\omega}F(\omega)$
Integration	$\int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{j\omega}F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$
Hilbert–Transformation	$f(t) * (2/j\omega)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega) \cdot \mathrm{sgn}(\omega)$
Faltung	$f(t) * g(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega) \cdot G(\omega)$
Multiplikation	$f(t) \cdot g(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi}F(\omega) * G(\omega)$
Energiesatz	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lvert F(\omega)\rvert^2 d\omega$
Abgetastete Zeitfunktion	$f(t) \cdot \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp_T(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(\omega) \overset{\{\frac{1}{2\pi}\}}{*} [\Omega \cdot \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp_\Omega(\omega)]; \Omega = \frac{2\pi}{T}$
Auto–Korrelation	$f(t) \star f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\lvert F(\omega)\rvert^2$
Kreuz–Korrelation	$f^*(t) \star g(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F^*(-\omega) \cdot G(\omega)$
Korrelation & Faltung	$f(t) \star g(t) = f(-t) * g(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F^*(\omega) \cdot G(\omega)$

Die allgemeinen Symmetriebeziehungen zwischen Zeitfunktionen und Spekrtaldichten sind in Gleichung (3.1) angegeben.

$$\begin{array}{ccccccccc}
f(t) = f_e(t) + f_o(t) & = & \Re\{f_e(t)\} & + & j\Im\{f_e(t)\} & + & \Re\{f_o(t)\} & + & j\Im\{f_o(t)\} \\
f(t) = f_R(t) + jf_I(t) & = & f_{R_e}(t) & + & jf_{I_e}(t) & + & f_{R_o}(t) & + & jf_{I_o}(t) \\
\circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ \\
| & & | & & | & & | & & | \\
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\
F(\omega) = F_e(\omega) + F_o(\omega) & = & \Re\{F_e(\omega)\} & + & j\Im\{F_e(\omega)\} & + & j\Im\{F_o(\omega)\} & + & \Re\{F_o(\omega)\} \\
F(\omega) = F_R(\omega) + jF_I(\omega) & = & F_{R_e}(\omega) & + & jF_{I_e}(\omega) & + & jF_{I_o}(\omega) & + & F_{R_o}(\omega)
\end{array} \tag{3.1}$$